MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI
O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

K.T. Mirtadjiyeva, T.A. Axunov

ASTROFIZIKANING MATEMATIK USULLARI

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI
O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

K.T. Mirtadjiyeva, T.A. Axunov

ASTROFIZIKANING MATEMATIK USULLARI

(O'quv qo'llanma)

Toshkent - 2023

K.T. Mirtadjiyeva, T.A. Axunov

«ASTROFIZIKANING MATEMATIK USULLARI » . Toshkent 2023.

Astrofizikaning matematik usullari fani bo'yicha taqdim etilayotgan ushbu o'quv qo'llanma universitetlarning 60531100-"Astronomiya" yo'nalishidagi talabalar uchun mo'ljallangan. Qo'llanmadan maqsad astrofizikada qollaniladigan matematik usullarni o'rganish orqali Koinot obyektlarida kechayotgan fizik hodisalarni ilmiy tadqiq qilish yo'llarini ochishdir.

Qo'llanmada kompleks o'zgaruvchan funksiyalar, opertsion hisob va maxsus funksiyalar, o'zgravitatsiyalanuvchi sistemalar va ularni modellashtirish, gravitatsion beqarorlik masalasi, sferik va disksimon modellarining gravitatsion beqarorliklari nazariyasiga oid natijalar keltirilgan. Kosmogoniya va umuman astrofizik obyektlarning kelib chiqishida katta ahamiyatga ega bo'lgan beqarorlik nazariyasiga alohida e'tibor berilgan.

Materiallarning boblar bo'yicha taqsimlanishida shu kursning namunaviy va ishchi dasturi asos qilib olingan.

Taqrizchilar: f.-m.f.d. Ilyasov S.P.,
f.-m.f.n. Shamshiyev F.T.

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti Kengashining 2023 – yil 28-dekabrdagi № 4-sonli qaroriga asosan o'quv qo'llanma sifatida nashr qilishga tavsiya etilgan.

SO‘Z BOSHI

Taqdim etilayotgan o‘quv qo‘llanma universitetlarning 60531100-Astronomiya yo‘nalishida tahsil olayotgan talabalar uchun mo‘ljallangan. Undan maqsad talabalarga astrofizikaning matematik usullarini o‘rgatish orqali astrofizik hodisalarni ilmiy bilish usullarini ochish, ularga chuqur va mustahkam darajada astronomik obyektlar va ularning tizimlarida yuz berayotgan jarayon va holatlarning asosiy qonuniyatlarini yetkazishdan iboratdir. Qo‘llanmada shuning bilan birga, talaba olgan bilimlarini amaliyotda qo‘llay bilish darajasiga erishishi kerakligi maqsad qilib qo‘yilgan.

Sakkiz bobdan iborat ushbu o‘quv qo‘llanma astrofizikada qo‘llaniladigan matematik usullarni yoritib bergan va u jahonda bu sohada amalga oshirilgan ishlarni etiborga olgan. Keltirilgan ma‘lumotlar turli mualliflarning aniq tadqiqod obyektlariga yoki tadqiqod usullariga tegishlidir. O‘quv qo‘llanmadagi mavzular universitetlarning astronomiya yo‘nalishidagi “Astrofizikaning matematik usullari” o‘quv dasturidagi mavzular bilan muvofiqlashtirilgan.

Qo‘llanmani tayyorlashda turli hil manbalardan keng foydalanilgan. Shu bois qo‘lyozmada xatolik yoki noaniqliklar kirib qolishi tabiiydir. Shuning uchun, aziz kitobxonlarimiz bu kamchiliklarni ko‘rganda bizga yetkazsalar, biz samimiy minnatdor bo‘lar edik.

Mualliflar

1-BOB. KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR

1.1-§. Kirish. Fanning maqsadi va vazifalari

Fanning maqsadi. Astronomiya soxasida erishilayotgan yutuqlar na faqat kuzatuv yordamida qo'lga kiritilayapti, balki bunda nazariy yondashish ham o'z o'rniga ega. Shu sababli talabalar kelajakda astrofizikadagi tenglamalarni va ularni yechish usullarini juda yaxshi bilishlari hozirgi kunning talabi hisoblanadi.

Astrofizikaning matematik usullari fani koinotda sodir bo'layotgan fizik jarayonlar va hodisalarni o'rganish asosida osmon jismlarini, ularning tizimlarini va ular orasidagi fazoni o'rganadigan astronomiyaning bo'limidir. Astrofizika kosmik chang zarralaridan tortib galaktikalararo tuzilmalarga va umuman olamga qadar bo'lgan har qanday miqyosdagi osmon obyektlarini, shuningdek, barcha turdagi maydonlarni (tortishish, magnit, yelektromagnit nurlanish) va tashqi makonning geometrik xususiyatlarini o'rganadi.

Nazariy bilimlar bilan qurollanish asosida biz xattoki zamonaviy teleskoplar yordamida ham kuzata olish imkoniyatiga ega bo'lmayotgan murakkab jarayonlar haqida fikr yuritish imkoniyatiga ega bo'lamiz. Bundan tashqari, kuzatuv yordamida olingan ma'lumotlar asosida ma'lum bir emperik munosabatlarni topish ham talabalardan ma'lum bir metematik usullarni bilishni talab qiladi.

Fanni o'qitishning maqsadi – talabalarga analitik funktsiyalar nazariyasi, operatsion hisob va maxsus funktsiyalar haqidagi bilimlar, astrofizik tenglamalar va ularni yechish usullari, gravitatsion sistemalarni modellashtirish va beqarorlik masalarini tahlili xaqida to'liq ma'lumot berishdan iboratdir. Bir so'z bilan aytganda, talabalarda astrofizikani o'zlashtirishda ishlatiladigan matematik usullarining poydevorini xosil qilish va ularni astrfizik tadqiqotlarining nazariy asoslari, yulduzlar va ular sistemasini modellashtirish usullari bilan tanishtirishdan iborat. Shu bilan birga astronomik obyektlar va ular sistemalarining fizik hususiyatlari, ularning ichki tuzilishi va nurlanish qonuniyatlari bilan tanishtirishdan iborat. Nazariy bilimlar asosida osmon jismlarining asosiy paramektrlarini, o'zgaruvchan obyektlarning hususiyatlarini aniqlash usullarini va kosmologiya elementlarini o'rgatish ham shu qatorga kiradi.

Fanning vazifalari. Astrofizikaning matematik poydevorini yaratish maqsadiga erishish uchun ushbu fan o'zining oldiga aniq vazifalarni qo'yishi kerak. Shundan kelib chiqqan holda fanning vazifasi quyidagilardan iborat: kompleks sonlar va ular ustidagi amallar; kompleks o'zgaruvchanli funktsiyalar xususiyatlari; umumlashgan Lejandr polinomlari va sferik funktsiyalar; ikki o'zgaruvchili xususiy hosilali differentsial tenglamalarni yechish usullari; gravitatsion sistemalarning dinamik evolyutsiyasi va bevarorligi nazariyasi; o'zgravitatsion sistemalarning nomuvozanatli modellari; dispertsion tenglamaning nostatsionar analoglari haqida bilim berish va ularni tushuntirish.

Bundan fanning vazifasi – astrfizik tadqiqotlarining nazariy asoslari, yulduzlar va yulduzlararo muxit fizikasi bilan tanishtirish, matematik fizika tenglamalarini yulduzlar atmosferasini, yulduzlarning ichki tuzilishini va evolyutsiyasini, yulduzlararo muxit fizikasini, nur o'tkazish qonuniyatlarini o'rganishda qo'llashni o'rgatishdan iborat.

Bu vazifalarni amalga oshirish uchun talabalarning bilim va ko'nikmalarini hisobga olgan holda yondashish kerak. Har bir mavzu chuqur tushuntirilishi va ularni amalda qo'llash ko'nikmalarini hosil qilinishi shart.

Fanni o'rganishdagi muammolar, uslubiy ko'rsatmalar. Astrofizikaning matematik usullari fanini o'zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida talaba: kompleks sonlar va ular ustidagi amallar, kompleks o'zgaruvchanli funktsiyalar xususiyatlari; umumlashgan Lejandr polinomlari va sferik funktsiyalari; ikki o'zgaruvchili xususiy hosilali differentsial tenglamalari; gravitatsion sistemalarning dinamik evolyutsiyasi va gravitatsion beqarorlik nazariyasi; o'zgravitatsion sistemalarning nomuvozanatli modellari; dispertsion tenglamaning nostatsionar analoglarini haqida hamda galaktikalar va ularning katta masshtabli tuzilmalarining yuzaga kelishi mexanizmlari va mezonlari haqida bilim va tasavvurlarga ega bo'lishi talab etiladi.

Fanni o'rganishda kompleks sonlarning turli formalari va kompleks o'zgaruvchili funktsiyalar bilan ishlash; umumlashgan Lejandr polinomlari va sferik funktsiyalarni hisoblash, dispersion tenglamalarni yechish, gravitatsion beqarorlik masalarini tekshirish hamda kosmik obyektlar bo'yicha kuzatuv ma'lumotlarni interpretatsiyalash va ularni obyektlar parametrlarini aniqlashda qo'llash; obyektlarning funlamentalr parametrlarini aniqlash va astrofizik hisob-kitoblarni bajarish, turli tipdagi yulduzlar tadqiqoti, yulduzlararo chang va gazning fizik holati, Koinot va undagi obyektlarning ichki tuzilishini va evolyutsiyasini bilishi va ularda ushbu bilimlardan foydalana olishi bo‘yicha amaliy mahorat va ko‘nikmalarni shakllantirishga alohida e’tibor berilishi shart.

Astrofizikaning matematik usullari fanini o‘zlashtirish uchun o‘qitishning ilg‘or va zamonaviy usullardan foydalanish, yangi informatsion-pedagogik texnologiyalarni tadbiq qilish muxim axamiyatga egadir. Fanni o‘zlashtirishda darslik, o‘quv va uslubiy qo‘llanmalar, tarqatma materiallar, tajriba namoishlari, internet tarmog‘idan, ko‘rgazmali materiallardan foydalaniladi. Shuningdek, ma'ruza, seminar va laboratoriya mashg‘ulotlarida mos ravishda ilg‘or pedagogik texnologiyalardan foydalanish tavsiya etiladi. Shuningdek, fanning ayrim mavzulari talabalarga mustaqil ish sifatida o‘zlashtirish uchun beriladi. Internet ma'lumotlaridan foydalanish orqali o‘qitiladi.

Fanni o‘zlashtirish uchun quyidagi adabiyotlardan foydalanish uslubiy ko‘rsatma sifatida amal qiladi: Тихонов А.Н., Свешников К.А., Теория функция комплексной переменой. М., 1980; Сидоров Ю.В. Федорюк М.В. Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М. 1982.; Тешабаева Н.Х. Математик физика методлари. Т. 1980; Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения матаматической физики. М., 1977; Поляченко В.Л., А.М. Фридман Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М. Наука, 1976; Соболев В.В. Курс теоретической астрофизики. М.: Наука, 1985; Ашуров А.Е., Назарий астрофизика, маърузалар матни, ЎзМУ 2001; T. Padmanabhan Theoretical Astrophysics: Volume I, Astrophysical Processes, Cambridge University Press, 2000; T. Padmanabhan Theoretical Astrophysics, Volume II: Stars and Stellar Systems, Cambridge University Press, 2001; T. Padmanabhan Theoretical Astrophysics, Volume III: Galaxies and Cosmology, Cambridge University Press, 2002; Сурдин В. Физика звезд, МГУ, М., 2005; Sattarov I. Astrofizika, 2-qism, Toshkent, 2007.

Fanning astronomiyaning bo‘limlari va boshqa tabiiy fanlarni o‘rganishdagi o‘rni. Ushbu fan astronomiyaning barcha bo‘limlarida o‘z o‘rniga ega. Chunki astronomiya soxasida erishilayotgan yutuqlar na faqat kuzatuv yordamida qo‘lga kiritilayapti, balki bunda nazariy yondashish ham o‘z o‘rniga ega. Shu sababli talabalar kelajakda astrofizikadagi tenglamalarni va ularni yechish usullarini juda yaxshi bilishlari hozirgi kunning talabi hisoblanadi. Nazariy bilimlar bilan qurollanish asosida biz xattoki zamonaviy teleskoplar yordamida ham kuzata olish imkoniyatiga ega bo‘lmayotgan murakkab jarayonlar haqida fikr yuritish imkoniyatiga ega bo‘lamiz. Bundan tashqari, kuzatuv yordamida olingan ma'lumotlar asosida ma'lum bir emperik munosabatlarni topish ham talabalardan ma'lum bir metematik usullarni bilishni talab qiladi. Ayniqsa, mazkur fan bo‘yicha olingan bilimlar umumiy va amaliy astrofizika, galaktik astronomiya, galaktikalar fizikasi, yulduzlar va yulduzlararo muhit fizika bo‘limlarini o‘zlashtirishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Astronomiyaning turli bo‘limlari yo‘nalishida olib boriladigan kuzatuv ma'lumotlarining tahlili, koinot jismlari va ularning sistemalarining kelib chiqishi va rivojlanish etaplari tadqiqotida mazkur fanda olingan bilimlar o‘z o‘rniga ega. Astrofizik sistemalar va ulardagi jarayonlarni modellashtirish, hosil qilingan tenglamalar va ularning tahlili osmon jismlarining shakllanishi va evolyutsiya muammolarini hal etishda ushbu fan bilimlaridan foydalaniladi.

Astrofizikaning matematik usullari fani doirasida hosil qilingan bilimlar fizikaning turli bo‘limlarini o‘zlashtirishda ham o‘z o‘rniga ega. Masalan, plazma fizikasi muammolarini hal etishda yulduzlar va yulduzlararo muhit fizikasida olingan bilimlardan foydalaniladi. Nostatsionar astronomik sistemalar evolyutsiyasining boshlang‘ich bosqichi uchun tuzilgan modellar fizikaning turli bo‘limlarida ham qo‘l keladi.

Mavzu bo‘yicha nazorat savollari

1. Astrofizikaning matematik usullari fanining maqsadi nimadan iborat?
2. Fanning vazifalari qanday?
3. Fanni o‘rganishdagi muammolar nimalardan iborat?
4. Boshqa bo‘limlar va tabiiy fanlarni o‘rganishdagi roli qanday?

1.2-§. Kompleks sonlar hususiyatlari

Kompleks sonlar tavsifi. Kompleks sonlar – bu haqiqiy sonlar to‘plamining kengaytmasi, odatda C bilan belgilanadi. Har qanday kompleks son

$$x + iy$$

rasmiy yig‘indisi sifatida ifodalanishi mumkin, bu yerda x va y haqiqiy sonlar, i mavxum birlik ($x^2 = -1$ tenglamaning yechimlaridan biri).

Kompleks sonlar algebraik yopiq sohani hosil qiladi - bu kompleks koeffitsientli n - darajali ko‘phadning n ta kompleks ildizga ega ekanligini anglatadi, ya'ni bu yerda algebraning asosiy teoremasi to‘g‘ri. Bu matematik tadqiqotlarda kompleks sonlarning keng qo‘llanilishining asosiy sabablaridan biridir.

Bundan tashqari, kompleks sonlardan foydalanish matematik fizika va tabiiy fanlar – elektrotexnika, gidrodinamika, kartografiya, kvant mexanikasi, tebranishlar nazariyasi va boshqa ko‘plab ilmiy-tadqiqot yo‘nalishlarida qo‘llaniladigan matematik modellarni qulay va ixcham tarzda shakllantirishga imkon beradi.

Kompleks sonlarning sohasini $z^2 + 1$ ko‘phadning ildizi mavjud bo‘lgan haqiqiy sonlar sohasining kengaytirilgani deb tushunish mumkin. Quyidagi ikkita elementar modellar shuni ko‘rsatadiki, sonlarning shunday tizimini izchil tuzish mumkin.

Kompleks sonning standart va matritsa ko‘rinishdagi modellari. Z kompleks sonini (x, y) haqiqiy sonlarining tartiblangan juftligi ko‘rinishida tasvirlash mumkin. Bunday juftliklarni qo‘shish va ko‘paytirish amallarini quyidagicha kiritamiz:

$$\begin{gathered}(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \\ (x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' - yx')\end{gathered} \tag{1.1}$$

Haqiqiy sonlar ushbu modelda kompleks sonlar to‘plamining bir qismidir va $(x, 0)$ ko‘rinishidagi juftliklar bilan ifodalanadi va bunday juftliklar bilan amallar odatdagi haqiqiy sonlarni qo‘shish va ko‘paytirishga mos keladi. Mavhum birlik $i = (0, 1)$ juftligi bilan ifodalanadi; Uning kvadrati $(-1, 0)$ kabi bo‘lishini, ya'ni -1 ga teng ekanligini tekshirish oson.

Yuqorida aniqlangan amallar haqiqiy sonlar bilan bajariladigan amallarga aynan o‘xshashligini ko‘rsatish qiyin emas. Bunda faqat katta va kichik munosabatlari operatsiyalari holi mustasnodir. Chunki haqiqiy sonlarning tartibini unga barcha kompleksini sonlarni kiritib va shu bilan birga tartibning odatdagi xususiyatlarini saqlab qolgan holda kengaytirish mumkin emas.

Kompleks sonlarni quyidagi xaqiqiy matritsalar oilasi ko‘rinishida tasvirlash mumkin

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Bunda oddiy matritsaviy qo‘shish va ko‘paytirish o‘rinli bo‘ladi.

Kompleks sonlar ustida amallar.

- $a + bt = c + di$ munosabat $a = c, b = d$ ekanligini bildiradi (ikki kompleks sonlar ularning xaqiqiy va mavxum qismlari o‘zaro teng bolgandagina teng bo‘ladi).
- Yig‘indisi:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i\,. \tag{1.3}$$

- Ayirmasi:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i. \tag{1.4}$$

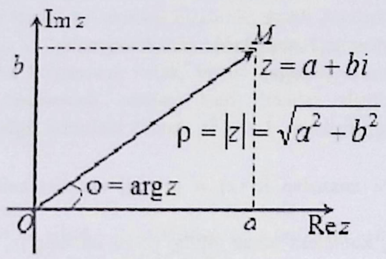
- Ko‘paytmasi:

$$\begin{aligned}(a + bi)\cdot(c + di) &= ac + bci + adi + bdi^2 = \\ &= (ac - bd) + (bc + ad)i\,.\end{aligned} \tag{1.5}$$

- Bo‘linmasi:

$$\frac{(a + bi)}{(c + di)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i\,. \tag{1.6}$$

Kompleks sonning geometrik modeli. To‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasiga ega tekislikni ko‘rib chiqamiz. Har bir $z = x + iy$ kompleks soniga tekislikning $\{x, y\}$ koordinatali nuqtalari bilan moslashtiramiz. Bunday tekislik kompleks tekislik deyiladi. Bu tekislikda haqiqiy sonlar absissa o‘qini egallaydi, mavxum birlik esa ordinata o‘qidagi birlik sifatida tasvirlanadi.



1.1-Rasm. Kompleks sonni geometrik tasvirlash

Ko'p xollarda kompleks tekislik sifatida qutb koordinatalar sistemasini qarash ham maqsadga muvofiqdir, bunda nuqtaning koordinatalari koordinata boshigacha bo'lgan masofa (modul) va nuqta radius-vektorining gorizontal o'q bilan hosil qilgan burchagi (argument) bo'ladi.

Faraz qilaylik, $z = x + iy$ –kompleks son bo'lsin, bu yerda x va y xaqiqiy sonlar. z ning $x = R(z)$ yoki Re z va $y = I(z)$ yoki Im z sonlar mos ravishda xaqiqiy (yohud real) va mavxum qismlari deyiladi.

Agar $x = 0$ bo'lsa, z mavxum yoki xaqiqiy mavxum son deyiladi.

Agar $y = 0$ bo'lsa, z xaqiqiy son bo'ladi.

Kompleks sonlarning moduli (absolyut qiymatш) deb kompleks tekislikning tegishli nuqtasi radius-vektorining uzunligiga aytiladi (yoki, shu songa to'g'ri keluvchi kompleks tekislik nuqtasi bilan koordinata boshi orasidagi masofa).

Z kompleks sonining absolyut qiymati (yana u |z| ko'rinishda yoziladi)

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.7}$$

ifoda bilan aniqlanadi. Ko'pincha r yoki ρ harflari bilan belgilanadi. Agar z haqiqiy son bo'lsa, u holda |z| ushbu haqiqiy sonning absolyut qiymati bilan mos keladi.

$z, z_1, z_2 \in C$ kompleks sonlar uchun quyidagi modul xossalari o'rinli:

$|z| \geq 0$, bunda $|z| = 0$ bo'lishi uchun faqat va faqatgina $z = 0$ sharti o'rinli;

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ uchburchak tengsizligi;

$|z_1 \cdot z_2| \leq |z_1| \cdot |z_2|$;

$\left|\frac{z_1}{z_1}\right| \leq \frac{|z_1|}{|z_2|}$;

Uchinchi xossadan $|a \cdot z| = |a| \cdot |z|$ ekanligi kelib chiqadi|, bunda $a \in R$.

z_1 va z_2 kompleks sonlar juftligi uchun ularning $|z_1 - z_2|$ modul farqi kompleks tekisligidagi ularga mos nuqtalar orasidagi masofaga teng. Z soniga mos nuqtaning radius vektorining φ (radianlarda) burchagi z sonining argumenti deyiladi va arg z deb belgilanadi.

Ushbu tariflardan quyidagilar kelib chiqadi:

a) Agar $x > 0$ bo'lsa $\varphi = \operatorname{arctg} y/x$ o'rinli,

b) Agar $x < 0, y \geq 0$ bo'lsa, $\varphi = \pi + \operatorname{arctg} y/x$ o'rinli;

c) Agar $x < 0, y < 0$ bo'lsa, $\varphi = -\pi + \operatorname{arctg} y/x$ bo'ladi;

d) Agar $x = 0, y > 0$ bo'lsa, $\varphi = \pi/2$ bo'ladi;

e) Agar $x = 0, y < 0$ bo'lsa, $\varphi = -\pi/2$ bo'ladi;

Kompleks nol uchun argument qiymati aniqlanmagan. Nol bo'lmagan z soni uchun esa argument qiymati $2k\pi$ gacha aniqlikda topiladi, bu yerda k – ixtiyoriy butun son. φ argumentning bosh (asosiy) qiymati $-\pi < \varphi \leq \pi$ da bo'ladi.

Mavzu bo'yicha nazorat savollari

1. Kompleks sonlar deb qanday sonlarga aytiladi?
2. Kompleks sonning standart va matritsaviy modellari haqida nimalar bilasiz?
3. Kompleks sonlar ustida amallar qanday bajariladi?
4. Kompleks sonning geometrik modeli qanday?
5. Modul va argument nima?

1.3-§. Kompleks sonlarning turli shakllari va kompleks o'zgaruvchili funksiyalar

Kompleks sonning algebraik shakli. Z kompleks sonini $x + iy$ $(x, y \in R)$ shaklida yozish kompleks sonning algebraik shakli deyiladi. Kompleks sonlarning yig'indisi va ko'paytmasini hisoblash uchun shunday ifodalarni bevosita qo'shish va ko'paytirsh kerak, bunda qavslarni ochib chiqib va o'xshash xadlarni ixchamlab, natijani ham shunday standart shaklda ifodalash bilan amalga oshiriladi (bunda $i^2 = -1$ ekanligini yodda tutish kerak):

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ac + iad + ibc - bd = (ac - bd) + i(ad + bc) \quad (1.8)$$

Trigonometrik va ko'rsatkichli shakllari. Agar kompleks sonning xaqiqiy x va mavxum y qismlarini $r = |z|$ moduli va argument φ (bu yerda $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ ko'rinishda berilgan) orqali ifodalansa, u holda noldan tashqari har qanday z kompleks son trigonometrik shaklda yozilishi mumkin:

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)\,. \tag{1.9}$$

Eyler formulasi orqali kompleks sonlarning trigonometrik shakli bilan chambarchas bog‘liq bo‘lgan ularning eksponensial ifodasi ham foydali bo‘lishi mumkin:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}\,, \tag{1.10}$$

bu yerda $e^{i\varphi}$ – kompleks ko‘rsatkichli daraja holi uchun eksponentani kengaytirish. Bundan quyidagi keng foydalaniladigan tengliklar kelib chiqadi:

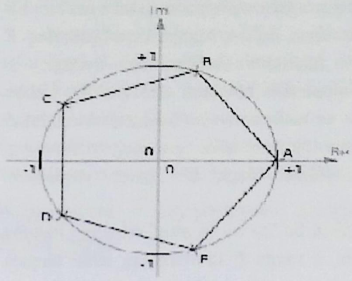
$$\cos\varphi = \frac{(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})}{2}\,; \qquad \sin\varphi = \frac{(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})}{2} \tag{1.11}$$

Muavr formulasi. Ushbu formula nolga teng bo‘lmagan va trigonometrik shaklda ifodalangan kompleks sonni darajaga ko‘tarishga imkonini beradi. Muavr formulasi quyidagicha yoziladi:

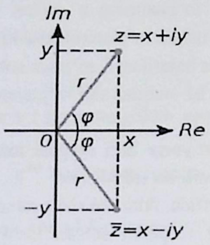
$$z^n = [r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)\,, \tag{1.12}$$

bu yerda r – kompleks sonning модуль, φ – uning argumenti. Shunga o‘xshash formula nol bo‘lmagan kompleks sondan k darajali ildizlarini hisoblashda ham qo‘llaniladi:

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= [r \cdot (\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k))]^{1/n} = \\ &= r^{1/n} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \qquad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \tag{1.13}$$



1.2-Rasm. Birdan beshinchi darajali ildizlar (beshburchakning uchlari).



1.3-Rasm. Qo'shma sonlarning geometrik tasvirlash

Qo'shma kompleks sonlar. Agar kompleks son $z = x + iy$ bo'lsa, u holda $\bar{z} = x - iy$ sonni z ga qo'shmasi (yoki kompleks qo'shmasi) deyiladi (shuningdek, bu son z^* bilan ham belgilanadi). Kompleks tekislikda qo'shma sonlar bir-birini haqiqiy o'qqa nisbatan simmetrik aks ettirish yo'li bilan hosil qilinadi.

Qo'shma sonlarning xossalari:

- $\bar{\bar{z}} = z$ (qo'shmaning qo'shmasi boshlang'ich kompleks songa teng).
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$
- $|\bar{z}| = |z|$ (qo'shma sonning moduli boshlang'ichdagidek bo'ladi).
- $Re\, z = \frac{z+\bar{z}}{2}$; $Im\, z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar. Ushbu tushuncha, y'ani kompleks o'zgaruvchili funksiya haqiqiy o'zgaruvchining funktsiyasi tushunchasi singari kiritilgan. Agar E to'plamining har bir nuqtasiga unga mos ma'lum bir kompleks sonni beradigan qonun berilgan bo'lsa, kompleks tekislikning E to'plamida kompleks o'zgaruvchili funktsiya berilgan deb aytamiz. E to'plamni erkin o'zgaruvchining qiymatlari to'plami deb ataladi. Ushbu to'plamning tuzilishi juda murakkab va turli-tuman bo'lishi mumkin, ammo kompleks o'zgaruvchili funktsiyalar nazariyasida maxsus tuzilmaning to'plamlari ko'rib chiqiladi. Kelajakda bizga bir qator yordamchi tushunchalar kerak bo'ladi.

Agar z nuqtaning ε atrofi mavjud bo'lsa va bu atrof sohadagi hamma nuqtalar E to'plamga tegishli bo'lsa, z nuqta E to'plamning ichki nuqtasi deyiladi. Masalan, $|z| \leq 1$ to'plamning z nuqtasi ichki nuqta bo'ladi, agar $|z| < 1$ holida $z = 1$ nuqta ushbu to'plamning ichki nuqtasi bo'lmasa.

Agar quyidagi shartlar bajarilsa, E to'plam soha bo'ladi:

1) E to'plamning har bir nuqtasi shu to'plamning ichki nuqtasi bo'lishi kerak;

2) E to'plamning ixtiyoriy ikki nuqtasi tutashtirilsa, undagi har bir nuqta shu E to'plamga tegishli bo'lishi kerak.

Sohaning ushbu ta'rifida, ikkinchi shart sohaning bog'lanish shartidir. Masalan, $|z| < 1$ nuqtalar to'plami sohani tashkil qiladi. Xuddi shunda $z_0 \cdot (|z - z_0| < \varepsilon)$ nuqtaning ε atrofi ham sohani tashkil qiladi. $|z| \leq 1$ nuqtalarning to'plami soha bo'lmaydi, chunki uning hamma nuqtalariyam ichki nuqtalar bo'lavermaydi. Bundan tashqari yana $|z| \neq 1$ va $|z| < 1$, $|z - 4| < 2$ nuqtalarning to'plamlari ham oblastlar bo'la olmaydilar, chunki ular bog'langan emaslar.

G sohasida berilgan z kompleks o'zgaruvchili bir qiymatli funktsiyasi shunday qonun bilan aniqlanadi, bunda G sohaga tegishli z ning har bir qiymatiga mos holdagi aniq w kompleks soni to'g'ri keladi va $w = f(z)$ sifatida yoziladi.

Mavzu bo'yicha nazorat savollari

1. Kompleks sonning algebraik shakli qanday?
2. Kompleks sonlarning trigonometrik va ko'rsatkichli shakllari haqida nimalar bilasiz?
3. Muavra formulasi qanday?
4. Qo'shma kompleks sonlar va ularning xossalar qanday?
5. Kompleks o'zgaruvchanli funksiyalar haqida nimalar bilasiz?