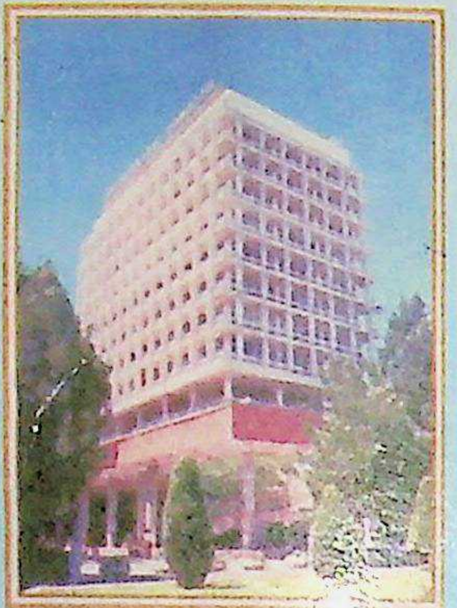

SH.G.KASIMOV, YU.[illegible].FAYZIYEV

XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI KANONIK KO'RINISHGA KELTIRISH VA UNING UMUMIY YECHIMINI TOPISHGA OID MASHQLAR

Тошкент-2011

O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O`RTA MAXSUS TA`LIM VAZIRLIGI

MIRZO ULUG`BEK NOMIDAGI
O`ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

SH.G. KASIMOV, Yu.E. FAYZIYEV

XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI KANONIK KO`RINISHGA KELTIRISH VA UNING UMUMIY YECHIMINI TOPISHGA OID MASHQLAR

USLUBIY QO`LLANMA

Toshkent - 2011

Услубий қўлланмада авторлар хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг ва дифференциал тенгламалар системасининг классификацияси масаласини, ҳамда иккинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини топиш усулларини баён этганлар.

Ушбу услубий қўлланма университетларнинг "Амалий математика ва информатика" йўналишлари бўйича бакалаврлар тайёрлайдиган факультет талабалари учун мўлжалланган.

В методическом пособии излагаются вопросы классификации дифференциальных уравнений с частными производными и систем дифференциальных уравнений. Описаны также методы нахождения общих решений дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

Данное методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности "Прикладная математика и информатика".

Authors expound problems of classification of partial differential equations and systems of differential equations. They also described methods of finding general solutions of second order partial differential equations.

This textbook is designed for the university students, who are enrolled at the faculty of "Applied Mathematics and computer science"

M u a l l i f l a r:

fizika–matematika fanlari doktori **K a s i m o v Sh. G.**
fizika–matematika fanlari nomzodi **F a y z i y e v Yu. E.**
M a` s u l m u h a r r i r:
fizika–matematika fanlari doktori, professor **Alimov Sh. A.**
T a q r i z c h i l a r:
fizika–matematika fanlari doktori, dotsent **Zikirov O.S.**
fizika–matematika fanlari nomzodi, dotsent **Qayumov E.**

Uslubiy qo`llanma Mirzo Ulug`bek nomidagi O`zbekiston Milliy universiteti Ilmiy Kengashi tomonidan nashrga tavsiy qilingan.(2011 yil 26 aprel, 9 –sonli bayonnoma)

Mundarija

Kirish

Ma`lumki, tabiiy fanlarning har xil sohalarida uchraydigan ko`pgina jarayonlarni o`rganishda xususiy hosilali differensial tenglama yoki xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasini oldindan berilgan boshlang`ich va chegaraviy shartlarda yechish masalalarini o`rganishga duch kelinadi. Bunday jarayonni ifodalavchi matematik masalalar ko`pgina umumiylikka ega bo`lib, matematik fizika tenglamalarining predmetini tashkil etadi. Matematik fizika tenglamalari matematikaning asosiy fundamental va tadbiqiy bo`limlaridan bo`lib, u bakalavryatning matematika, mexanika, amaliy matematika va informatika kabi yo`nalishlari o`quv rejasidagi umumkasbiy fanlardan biri hisoblanadi. Xususiy hosilali differensial tenglama yoki xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasini o`rganish uchun ularni sinflarga ajratish maqsadga muavfiqdir.

Uslubiy qo'llanmada xususiy hosilali differensial tenglamalarning va differensial tenglamalar sistemasining klassifikatsiyasi masalasi, hamda ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarning umumiy yechimini topish usullari bayon etilgan.

Ushbu uslubiy qo'llanma universitetlarning "Amaliy matematika va informatika" yo'nalishlari bo'yicha bakalavrlar tayyorlaydigan fakultet talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, shu yo'nalishning namunaviy dasturida kiritilgan "Matematik fizika tenglamalari" fani rejasiga asosan yozilgan.

1 - §. XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMANING XARAKTERISTIKASI HAQIDA TUSHUNCHA

Ω – orqali $x_1, x_2, ..., x_n$, $n \geq 2$, ortogonal dekart koordinatali x nuqtalarning n – o'lchamli R^n evklid fazosidan olingan sohani belgilaymiz.

Ω – sohadan olingan x nuqta va $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = k$, $k = 0, ..., m$, $m \geq 1$, manfiymas butun indeksli $p_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n}$ haqiqiy o'zgaruvchili $F\left(x, ..., p_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n}, ...\right)$ – haqiqiy qiymatli funksiya berilgan bo'lib, hech bo'lmaganda $\frac{\partial F}{\partial p_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n}}$, bunda $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = m$, hosilalardan birortasi noldan farqli bo'lsin. Bu yerda $p_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n} = \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ deb olamiz.

$$F\left(x, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}, ...\right) = 0 \qquad (1)$$

shakldagi tenglik $u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in \Omega$ noma'lum fungsiyaga nisbatan m – tartibli xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi va bu tenglikning chap tomoni esa, $m-$tartibli xususiy hosilali differensial operator deyiladi.

Ω sohada aniqlangan $u(x)$ haqiqiy qiymatli funksiya va uning (1) tenglamada qatnashgan barcha xususiy hosilalari uzluksiz bo'lib, bu tenglamani ayniyatga aylantirsa, u holda shu funksiyaga regulyar yechim deyiladi.

Agar F funksiya $p_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$, bunda $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = k$, $k = 0,...,m$ barcha o'zgaruvchilarga nisbatan chiziqli funksiya bo'lsa, u holda (1) tenglamaga chiziqli tenglama deb ataladi. Agar F funksiya $p_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$, bunda $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = m$ o'zgaruvchigagina nisbatan chiziqli bo'lsa, u holda (1) tenglamaga kvazichiziqli tenglama deb ataladi.

$Lu = f(x)$ chiziqli tenglama uning o'ng tomonidagi $f(x)$ funksiyaning barcha $x \in \Omega$ uchun nolga teng yoki aynan noldan farqli bo'lishligiga qarab bir jinsli yoki bir jinsli bo'lmagan tenglama deb ataladi.

Osongina ko'rsatish mumkinki, agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar bir jinsli bo'lmagan $Lu = f(x)$ chiziqli tenglamaning yechimlari bo'lsa, u holda ularning ayirmasi $w(x) = u(x) - v(x)$ esa $Lw = 0$ bir jinsli tenglamaning yechimi bo'ladi. Bundan tashqari, agar $u_k(x)$, $k = 1,...,l$ funksiyalar bir jinsli tenglamaning yechimlari bo'lsa, u holda $u = \sum_{k=1}^{l} c_k u_k(x)$, bunda c_k – haqiqiy o'zgarmaslar, ham shu tenglamaning yechimi bo'ladi.

(1) tenglamaning tipi

$$K(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F}{\partial p_{\alpha_1 ... \alpha_n}} \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$$

xarakteristik forma orqali aniqlanadi.

$$\sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x) \qquad (2)$$

tenglama m – tartibli xususiy hosilali chiziqli differensial tenglamaning umumiy shakli, bunda $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ – multiindeks, $\alpha_j \ge 0$, $j = \overline{1, n}$, bundan tashqari α_j – butun sonlar, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ multiindeks moduli, $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$ bo'lsin. $D^\alpha \to \xi^\alpha$ almashtirish orqali (2) tenglamaning $\sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ simvolini hosil qilamiz, bunda $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} ... \xi_n^{\alpha_n}$.

$\sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ formaga (2) tenglamaning bosh simvoli yoki xarakteristik ko'phadi deb ataladi.

$x \in \Omega$ tayinlangan nuqta bo'lsin. Noldan farqli $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \neq 0$ vektor uchun $\sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha = 0$ bo'lsa, u holda bu vektor xarakteristik yo'nalish deb ataladi.

$F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ formula bilan berilgan gipersirt uchun har bir nuqta xarakteristik yo'nalishga ega bo'lsa, ya'ni

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} = 0, \ gradF \neq 0 \end{cases} \tag{3}$$

bo'lsa, u holda xarakteristik sirt deb ataladi. Bu xarakteristika tenglamasidir, bunda

$$grad\, F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}\right).$$

Ikkinchi tartibli kvazichiziqli (barcha yuqori tartibli hosilalarga nisbatan chiziqli) uzluksiz $a_{ij}(x)$ koeffitsientli tenglamani qaraymiz:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, grad\, u) = 0. \tag{4}$$

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $n \geq 2$ o'zgaruvchili $F(x)$ funksiya C^1 sinfdan olingan bo'lib, $F(x) = 0$ sirtda $grad\, F(x) \neq 0$ va

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \tag{5}$$