Sh. MAMATQULOV

TUTASH MUHITLAR MEXANIKASI

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI
O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

SH.MAMATQULOV

TUTASH MUHITLAR MEXANIKASI

To'ldirilgan va qayta ishlangan ikkinchi nashr

O'quv qo'llanma

Toshkent
"Ma'rifat"
2024

UO‘K: 532/533(075.8)
KBK 22.25ya73
M-23

Mamatqulov Sh. Tutash muhitlar mexanikasi. O‘quv qo‘llanma.

-T:. “Ma‘rifat”. 2024. 320bet.

Ushbu o‘quv qo‘llanma universitetlarning Mexanika va matematik modellashtirish, Matematika hamda Amaliy matematika mutaxassisligi talabalari uchun amaldagi o‘quv dasturi asosida tuzilgan tutash muhitlar mexanikasi fani asoslari bo‘yicha muallifning uzoq yillik tajribalari 2008 yilda yaratgan materiallari davomi sifatida yozilgan.

O‘quv qo‘llanma talabalar, magistrantlar, doktorantlar, tutash muhitlar mexanikasining asoslarini o‘rganuvchi va uning turli tadbiqiy yo‘nalishlari masalalari bilan shug’ullanuvchilari uchun o‘zbek tilida chop etilishi bilan foydali va shuningdek universitetda mexanika asoslarini o‘rganish sifat ko‘rsatkichlari ko‘tarilishiga olib kelishi shubhasizdir.

UO‘K: 532/533(075.8)
KBK 22.25ya73
M-23

Ma’sul muharrir:

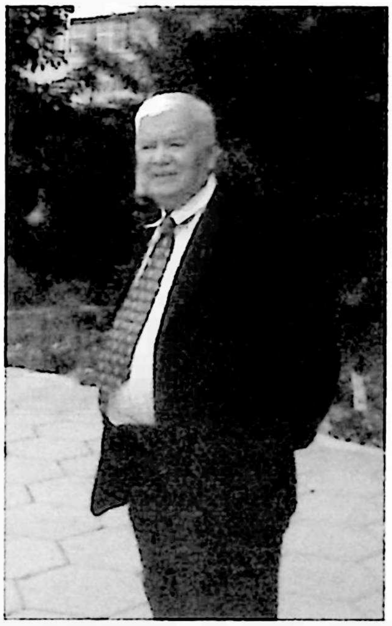
Mamatova N.T. - fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

Taqrizchilar:

Xaldjigitov A.A. - Fizika-matematika fanlari doktori, professor

Sibukayev Sh.Z. - Fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

ISBN: 978-9910-765-81-0



Shavkat Mamatqulov
O'zbekiston Milliy universiteti
«Nazariy va tatbiqiy mexanika»
kafedrasi professori
2008 yil

O'zbekiston Milliy Universiteti – mening hayotimda

O'rta maktabning so'nggi sinflarida o'qib yurgan paytlarimdayoq har bir sinfning eng ilg'or o'quvchilarining ko'pchiligi O'rta Osiyo davlat universitetiga kirib o'qishni orzu qilishlarini eslayman. Bu paytlar, men Toshkent viloyati Piskent tumanidagi yagona o'rta maktab-ni kumush medal bilan tamomlagan paytlarimga to'g'ri keladi (1955 y.). U vaqtlarda o'rta maktabda maxalliy aholidan chiqqan o'qituvchilar yetishmas, frontdan qaytib kelgan oz sondagi fidoyi o'qituvchilar ilm-fanga chanqoq yoshlarga ertadan kechgacha dars berishar, o'rgatishar edi. Esda qoladiganlaridan biri shuki, hali ularning ko'pchiligi to'la oliy ma'lumotga ega bo'lishmasa ham, o'z ustlarida astoydil ishlaydigan insonlar edilar. Masalan, frontdan qaytgan Samadov Majid aka adabiyot o'qituvchisi bo'lsa ham, arifmetika masalalarini ulardan yaxshi yechadigan kishini topish qiyin edi. Majid aka 7-8 sinflarga, hatto 10 sinflarga ham fizika darslarini olib borganligiga guvohman.

Toshkentga kelib, universitetga kirish uchun hujjat topshirgan paytimdan boshlab shu narsaga amin bo'ldimki, odatda barcha o'rta maktablarning eng a'lochi o'quvchilarining ko'pchiligi O'rta Osiyo davlat universitetida o'qishga intilishar ekan. Maktabni oltin medal bilan bitirganlar suhbat orqali, kumush medal bilan bitirganlar esa bitta imtihon topshirib o'qishga kirishlari mumkin edi. Kirish imtihonlarida dotsent F.X.Xojimullayev va Moskvadan endigina qaytgan professor S.X.Sirojiddinovlar ham ishtirok etishar edi. Maktabdagi a'lochi o'quvchilarning universitet fizika-matematika fakultetiga kirishga intilishlarini shundan ham bilsa bo'lardiki, men matematikadan kirish yozma imtihoni topshiruvchilari guruhda 51 ta kumush medal bilan bitirganlar yig'ilgandi.

1955-1960 yillarda O'rta Osiyo davlat universiteti talabasi bo'lar ekanman, kursdoshlarimni, ilm-fan asoslarini astoydil o'rgatishgan ustozlarimni eslayman, hayotimda ulardan umrbod minnatdorligimni aytishimni zarur deb bilaman. Bular dosyentlar F.X.Xojimullayev, X.A.Mustafin, M.T.Shokirova, M.A.Sobirov, A.D.Bagdasarov, P.Sh.Shoxaydarova, M.V.Vaxidov va boshqalar.

1959-1960 yillardan boshlab mexanika sohasini butun dunyoga va respublikamizga mashhur qilishgan olimlardan saboq olishga muyassar bo'lganimdan o'zimni universitet bag'ridagi ilm olgan eng baxtli insonlardan, deb hisoblayman. Akadyemiklar M.T.O'razboyev, X.A.Raxmatulin, V.K.Kabulovlar mening universitetni bitirishimda, Moskva davlat universiteti aspiranti bo'lishimda, fan nomzodi va fan doktori bo'lishimda katta rol o'ynagan insonlar sifatida ko'raman.

Akadyemik X.A.Raxmatullinning talabalik yillarimda universitet fizika-matyematika fakultetida o'qigan ma'ruzalari, yangi ilmga chanqoq yoshlarning mexanika faniga qiziqishlarini va so'ngra respublikamizdagi fan-texnika rivojiga, mexanikaning fundamental yo‘nalishlarining O‘zbekistonda rivojlanishiga olib keldi.

Butun asosiy ish faoliyatim faqat O‘zbekiston Milliy universitetida bo‘lib keldi. 1964 yildan beri shu kungacha shu universitetda mexanika sohasida ustozlarimdan o‘rgangan yo‘nalishlarda ishlab kelmoqdaman. 1973-1983 yillar “Tutash muhitlar mexanikasi” kafedrasi mudiri sifatida ishladim. 10 ga yaqin fan nomzodlariga ilmiy rahbarlik qildim, 10 ga yaqin O‘zbekiston va chet el ilmiy grantlariga rahbarlik qildim va shu loyihalarda ilmiy-tadqiqot olib bordim. Maxsus kurslar bo‘yicha ma’ruzalarim qadrdon universitetimdagina emas, balkm boshqa oliy o‘quv dargohlarida ham, jumladan Yugoslaviyada ham o‘qishimga to‘g’ri kelgan.

Mehnat faoliyatimda 190 ga yaqin ilmiy ishlarim xorijiy va mahalliy ilmiy jurnallarda, monografiya va bir qancha o‘quv qo‘llanmalarim o‘zbek tilida nashr qilindi.

Hozir ham shu sohada ishlayotganimdan, men uchun eng aziz dargoh bo‘lgan O‘zbekiston Milliy universitetining 90-yilligi arafasida o‘z shogirdlarim bo‘lganidan baxtiyorman va ular bilan astoydil ish olib boraveraman, degan umidlarim bor.

SO‘Z BOSHI

Tutash muhitlar mexanikasi mexanikaning qattiq, suyuq va gazsimon muhitlarning makroskopik harakatlari hamda muvozanatini o‘rganadigan bo‘limidir. Tutash muhitlar mexanikasi tarkibiga gidroaeromexanika, gaz dinamikasi, elastiklik nazariyasi, plastiklik nazariyasi va boshqa bo‘limlar kiradi.

Tutash muhitlar mexanikasida moddaning molekulyar tuzilishini hisobga olmay uni uzluksiz, tutash muhit deb qarash va shu bilan birga uning barcha xususiyatlari (zichlik, kuchlanish, zarracha tezligi va boshqalar)ni muhitda uzluksiz taqsimlangan deb qarash qabul qilingan. Bu molekulalarning o‘lchamlari tutash muhitlar mexanikasida nazariy va eksperimental tadqiqotlarda ko‘rib chiqiladigan zarrachalar hajmiga nisbatan ahamiyatsiz ekanligi bilan tasdiqlanadi.

Ushbu fanning asosiy maqsadi elastiklik nazariyasi va uning masalalari, plastiklik nazariyasi masalalari, gidrostatika muammolari, harakatlanuvchi jismga suyuqlik va gazlarning ta‘siri, suyuqlik va qattiq jismlarda to‘lqin tarqalish masalalari, suyuqlik va gazlarning turbulent harakati masalalari kabi muammolarni o‘rganishdan iborat.

Talabalar bu fanni mukammal o‘zlashtirishlari uchun ularga ma‘lum bilimlar majmuasi zarur bo‘ladi. Masalan, tutash muhitlar mexanikasi kursini mukammal tushunib, uni o‘zlashtirishlari uchun matematik analiz, oddiy differentsial tenglamalar, chiziqli algebra, differentsial geometriya, nazariy mexanika kabi fanlaridan ma'lum bilimlar talab qilinadi. Bu borada talabalar kuzatuvchi bo'lib qolmasdan, balki o'zlari misol va masalalar yechish, mavzularni mustaqil o'zlashtirishlari lozim.

Tutash muhitlar mexanikasi faniga bag'ishlangan darsliklar, o'quv qo'llanmalar ingliz, rus va boshqa tillarda ko'plab nashr qilingan. Bu adabiyotlarning nazariy qismi bilan misol va masalalarga oid bo'limlari orasida biroz tafovut borligi seziladi. Hozirgi davr talabiga javob beradigan yuqori malakali mutaxassislar tayyorlash, ularning nazariy va amaliy masalalarni chuqur o'zlashtirishiga ko'maklashuvchi o'zbek tilida lotin alifbosida yaratilgan darsliklar, o'quv qo'llanmalari nashr etish muhim ahamiyatga ega.

Ushbu o'quv qo'llanma universitetlarning mexanika va matematik modellashtirish, matematika, amaliy matematika yo'nalishlari o'quv rejasidagi asosiy fanlardan biri bo'lgan "Tutash muhitlar mexanikasi" faniga bag'ishlangan.

Qo'llanmaning asosiy maqsadi, talabalarni tutash muhitlar mexanikasi va unda o'rganiladigan asosiy masalalar bilan tanishtirish, ular uchun zarur bo'lgan boshlang'ich bilimlarni berishdan iborat.

Ushbu o'quv qo'llanmani professor Sh.Mamatqulov Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti talabalariga uzoq yillar "Tutash muhitlar mexanikasi" fanidan olib borgan nazariy va amaliy mashg'ulotlari asosida yozganlar.

Mazkur o'quv qo'llanma avval ikki qismda chop qilingan bo'lib, uning qayta ishlangan va to'ldirilgan ikkinchi nashri hisoblanadi. U sakkiz bobdan iborat, uning birinchi bobida tutash muhit mexanikasining umumiy xarakteristikasi, asosiy gipotezalar, ikkinchi bobida tutash muhit mexanikasining kinematikasi yoritib berilgan. Qo'llanmaning uchinchi bobida dinamik tushunchalar va tenglamalar batafsil bayon qilingan. Keyingi boblarda tutash muhitning klassik modellari (to'rtinchi bob), tutash muhit mexanikasining termodinamikasi (beshinchi bob) sodda va ravon, shu bilan birga tushunarli qilib yoritib berilgan. O'quv qo'llanmaning oltinchi bobida tutash muhit mexanikasining sodda masalalari, suyuqlik va gazlar harakati hamda ularning muvozanatiga doir masalalar bayoni berilgan. Ettinchi va sakkizinchi boblar esa mos ravishda elastiklik nazariyasi masalalari hamda plastiklik nazariyasining ayrim masalalariga bag'ishlangan.

Ushbu o'quv qo'llanma uchun muqaddimani quyidagi ibora bilan yakunlashni o'rinli, deb hisoblayman: Ustozim Shavkat Mamatqulovning ushbu o'quv qo'llanmasi mexanikaning juda muhim va qiziqarli bo'limlaridan biri bo'lgan tutash muhitlar mexanikasining yanada rivojlanishiga xizmat qilsa hamda talabalarni ilm-fanga bo'lgan qiziqishlarini uyg'ota olsa, shu fanni chuqur o'zlashtirishlariga yordam bersa, ustoz o'z oldilariga qo'ygan vazifalarini bajargan, deb hisoblagan bo'lardilar.

Shavkat Mamatqulov - taniqli olim, texnika fanlari doktori, professor, respublikamizda mexanika faninig rivojlanishiga salmoqli hissa qo'shgan atoqli olim. Sh.Mamatqulov Respublika va Markaziy Osiyo mintaqasida yuqori malakali mutaxassislarning shakllanishiga katta hissa qo'shdilar, ularning bevosita rahbarligida 10 dan ortiq fan nomzodlari va doktorlari tayyorlandi. Oliy insoniy hislatli, ruhan boy, o'zining adolatparvar printsiplariga sodiq olimning butun hayot yo'li barchamizga o'rnakdir.

Har doim yuzidan nur yog'ilib turadigan ustozim har qanday sharoitda ham doimo kamtar, vazmin inson edilar. Bu inson biz shogirdlarning xotiramizda doim shunday saqlanib qoladilar.

fizika-matematika fanlari nomzodi,
dotsent **N.T.Mamatova**

I-BOB

1.1-§. TUTASH MUHIT MEXANIKASINING UMUMIY XARAKTERISTIKASI. ASOSIY GIPOTEZALAR

MSS[1]da qattiq, suyuq va gaz holatidagi jismlarning makroskopik nuqtayi nazardan harakatlari o‘rganiladi. Bu fan fundamental tushunchalar asosida, gipotezalar vositasida yaratilgan. Mexanik nuqtayi nazardan o‘rganilayotgan qattiq, suyuq va gaz holatidagi jismlar fazoning biror chekli yoki cheksiz bo‘lagini to‘la to‘kis tutash holda egallagan, deb faraz qilinadi. Fazoda olingan istalgan geometrik nuqtada tutash muhit «zarrasi» mavjud degan tushuncha kiritamiz va unga asoslanamiz.

Tabiiyki, bu fikrdan so‘ng shunday savol tug’ilishi mumkin:
biz barcha moddiy jismlar juda kichik zarralardan, ular molekula va atomlardan tashkil topgan, atomlar esa elektronlarga va yadrolarga ega degan va eksperimentlar asosida tasdiqlangan natijalar nima bo‘ladi, deyishingiz mumkin. Masalan, atom yadrosining radiusi 10^{-13} sm tartibida, vodorod molekulasi radiusi $1.36\cdot10^{-8}$ sm tartibidadir. Lekin vodorodning asosiy massasi uning yadrosida joylashgan.

Ma’lumki, oddiy sharoitda (0^0C va dengiz yuzasidagi atmosfera bosimida) $1\ \text{sm}^3$ havo hajmida $N=2.687\cdot10^{19}$ molekula bor. 60 km yuqorida esa $N=8\cdot10^{15}$, yulduzlar orasidagi muhitda esa $N=1$ molekula bor deyish mumkin. Shuningdek, temir uchun

---

[1] MSS-«Механика сплошной среды» ni o’zbek tiliga - TMM, yani «tutash muhit mexanikasi» deb tarjima qilindi - Sh.M.

$N = 8.622 \cdot 10^{22}\ 1/sm^3$. Bundan ko'rinib turibdiki, jismlar massasi joylashgan hajmlar shu jism egallagan hajmlarning nihoyatda kichik qismini tashkil etadi. Ya'ni jismlar «bo'shliqlar»dan iborat. Atom va molekulalar doimiy xaotik harakatda bo'ladilar. Ularning individual harakatini o'rganish mushkul ish: chunki ular soni, ko'rinib turibdiki, juda ko'p. Masalan, kislorod molekulalari 1 sekundda $6.55 \cdot 10^9$ marta to'qnashadi, ularning o'rtacha tezligi $v = 425$ m/sek atrofida, harakatlanuvchi bu zarralar o'rtasidagi ta'sir kuchlari ham ma'lum emas.

Tutash muhit mexanikasida real jismlar o'rganilganda, amaliyot uchun har bir zarraning trayektoriyasi, tezligi va boshqa xarakteristikalari emas, balki bu jism zarralari uchun o'rtacha bo'lgan xarakteristikalar kerak bo'ladi.

Real jismlarning harakati o'rganilganda statistik fizika metodlari ham qo'llaniladi. Statistik metodlar bilan ish ko'rilganda doimo ayrim qo'shimcha gipotezalarga murojaat qilinadiki, bularning hammasini ham asosli deb bo'lavermaydi. Ikkinchi tomondan, statistik metod asosidagi tenglamalar murakkab ko'rinishga ega bo'lib, effektiv yechimlar topish qiyin masalaga aylanadi.

Material jismlar harakatini o'rganishdagi ikkinchi yo'l bu - fenomenologik makroskopik nazariyadan iborat. Tajribadan olingan qonuniyatlar va ular bilan mos keladigan gipotezalar asosida ko'rilgan bu yo'l TMM yo'lidir.

Tutash muhit mexanikasining asosiy gipotezasi muhitning tutashligi gipotezasidir.

Jism fazoni yoki uning bo'lagini to'la ravishda qoplagan deb yuqorida aytilgan fikr real jismlar uchun taxminan mos keladi. Bu gipoteza TMMning asosiy gipotezasidir.

Deformatsiyalanuvchi jismlar tashqi kuchlar ta'sirida o'z o'lchamlari va formalarini o'zgartiradilar, jismning fikran ajratilgan bo'laklari o'rtasida kuchlar, zo'riqishlari, bosimlar deb ataluvchi mexanik miqdorlar paydo bo'ladiki, bu kattaliklar faqat tashqi kuchlargagina emas, balki jism geometrik formasiga, muhitning tajribalar asosida olinishi mumkin bo'lgan makroskopik xossalariga ham bog'liq bo'ladi. Bu muammolar TMMda o'rganiladi.

Gaz, suyuq yoki qattiq holatdagi jismlar, ularning aralashmalari turli sabablar bilan fazoda harakatlanishi va harakatlanish jarayonida «moddiy zarralar» orasidagi masofalar o'zgarishi mumkin. Bu yerda shuni yaqqol ko'rish mumkinki, bir tomondan tutash muhit tushunchasini kiritmay turib yaxlit, alohida moddiy jism tasavvuriga ega bo'lish qiyin, ikkinchi tomondan, har qanday tutash muhit aslida mayda zarralardan tashkil topganligi va ularda «bo'shliqlar» borligini ta'kidlash kerak. Bu dialektika asosida yechilishi kerak bo'lgan ichki ziddiyat va uning tajribalar asosida ma'lum masalalarni hal etishga xizmat qila oladigan nazariyasi bo'lib, nazariyaning amalda ishlatilishidir.

Fazo va vaqt tushunchalari haqida ham to'xtalib o'taylik. Bu tushunchalar nazariy mexanika kursida to'la va ravshan bayon etilgan. Shuning uchun bu tushunchalarning ayrim mohiyatlari ustidagina to'xtab o'tamiz.

Fazo deb koordinatalar deb ataluvchi sonlar orqali berilgan nuqtalar to‘plamiga aytiladi. Agar fazoda ikki nuqta orasidagi masofa aniqlangan bo‘lsa, bu fazo metrik fazo deyiladi. agar metrik fazoda ikki nuqta orasidagi masofa $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ bo‘lsa, bu fazo Yevklid fazosidir. Yevklid fazosiga shu fazo uchun umumiy bo‘lgan Dekart koordinatalar sistemasini kiritish mumkin. Bunday fazoda biz o‘rganadigan mexanika – Nyuton mexanikasidir. Bu fazoda joylashgan tutash muhit uning ixtiyoriy geometrik nuqtasida mavjuddir.

TMMda absolyut vaqt tushunchasi bilan ish ko‘ramiz. Bizning vaqtimiz barcha koordinata sistemalarida bir xil o‘zgaradi.

Shunday qilib, TMMda muhit harakati - kontinium harakati Yevklid fazosida absolyut vaqtdan foydalanib o‘rganiladi.

TMMda o‘rganilayotgan muhit harakat jarayoni davomida nuqtalar orasidagi masofalar o‘zgarishi mumkin. Uning mexanikasini o‘rganish keyingi qo‘llanmamizning mazmunini tashkil etadi. Harakat davomida muhit nuqtalari orasidagi masofa o‘zgarmasa, bunday harakat nazariy mexanikada o‘rganiladi. TMM usullarini o‘zlashtirishdan ilgari, bu fan qanday muammolar bilan shug’ullanishi doirasiga e’tibor beraylik. TMMning ayrim masalalari quyidagilardan iborat:

1) elastiklik nazariyasi masalalari;
2) plastiklik nazariyalari, uning masalalari;
3) gidrostatika masalalari;
4) suyuqlikda harakatlanuvchi jismga suyuqlikning ta’siri masalalari;
5) filtratsiya masalalari;
6) to‘lqin harakati, suyuqlik va qattiq jismlarda to‘lqinning tarqalish masalalari;

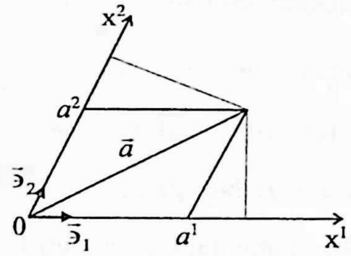
7) gazlarning kimyoviy o'zgarishlari bo'layotgan holatdagi, portlash va yonish jarayonlari bilan bo'lgan harakatlarini o'rganish masalalari;
8) qattiq jismlarning atmosfera qalin qatlamlariga kirganida yonish va erib ketishdan saqlash masalalari;
9) suyuqlikning turbulent harakati masalalari;
10) magnit gidrodinamikasi masalalari;
11) ob-havoning o'zgarishini tekshirish yo'nalishi;
12) biologik mexanika va h.k.

TMMning usuli-matematik tahlil usullaridir. TMMda mexanik masala yechilishi kerak bo'lgan ma'lum matematik masalaga keltiriladi va u o'z navbatida matematikaning ham rivojida katta rol o'ynab keladi. TMMda tajriba asosida olingan yechimlar ham muhim rol o'ynaydi. Tajriba matematik usullar asosida olingan yechimlarninggina emas, balki matematik tenglamalarga keltirilgandagi tutash muhit harakati va holatini akslantiruvchi munosabatlarning maqsadga muvofoqlik darajasini ham ko'rsatuvchi omil bo'lib xizmat qiladi.

O'quv qo'llanmada TMM uchun umumiy bo'lgan tenglamalar, qonuniyatlar, kinematik va dinamik munosabatlar bilan shug'ullanamiz. TMMda tenzor analizi keng qo'llanilgani sababli, tenzorlar analizi kursiga doir va TMM kursida zarur hisoblangan materiallar bilan tanishamiz.

1.2-§. TENZOR ANALIZI KURSIGA DOIR AYRIM ZARUR MASALALAR

1. Vektorning kontravariant va kovariant tashkil etuvchilari. Yig'indilarni ifodalashda indekslardan foydalanish. Agar $\vec{\text{э}}_1$ va $\vec{\text{э}}_2$ lar tekislikdagi bazis vektorlar bo'lsa, analitik geometriyadan ma'lumki, Dekart koordinata sistemasida $\vec{a} = a^1 \cdot \vec{\text{э}}_1 + a^2\, \vec{\text{э}}_2$ bo'ladi. Bunda a^1 va a^2 sonlarni vektorning to'g'riburchakli koordinatalari deyiladi. Agar koordinata sistemasi to'g'ri burchakli bo'lmagan koordinat sistemasidan iborat bo'lsa, uzunliklar bir xil birlikdan iborat bo'lishi shart bo'lmagan va koordinatalar o'qlari bo'ylab yo'nalgan bazis vektorlar sifatida $\vec{\text{э}}_1$ va $\vec{\text{э}}_2$ larni belgilasak, $\vec{a}$ vektorni 2 xil usulda: vektor uchidan koordinat o'qlariga parallel chiziqlar o'tkazib va vektor uchidan koordinata o'qlariga tik chiziqlar o'tkazish orqali aniqlash mumkin. a^1 va a^2 sonlari $\vec{a}$ vektorning kontravariant komponentalari deyiladi (1-rasm).



1-rasm

Shuningdek, quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi: $a_1 = (\vec{a} \cdot \vec{\text{э}}_1)$, $a_2 = (\vec{a} \cdot \vec{\text{э}}_2)$. Bu yerdagi a_1 va a_2 lar kovariant tashkil etuvchilar deyiladi. Yuqoridagi fikrlarni umumlashtirib, uch o'lchovli fazo uchun yoza olamiz:

$$\vec{a} = a^1 \cdot \vec{\text{э}}_1 + a^2 \cdot \vec{\text{э}}_2 + a^3 \cdot \vec{\text{э}}_3 = \sum_{i=1}^{3} a^i \cdot \vec{\text{э}}_i$$

Bir hadda i indeksi ikki marta takrorlansa, masalan, $a^i \cdot \vec{\ni}_i$ bo‘lsa, biz uni $\sum_{i=1}^{3} a^i \cdot \vec{\ni}_i$ ga teng deb belgilab olamiz, ya'ni $a^i \cdot \vec{\ni}_i = \sum a^i \cdot \vec{\ni}_i$ yigindi ma'nosida keltiriladigan bir hadli ifodalardagi bu indekslar lotin indekslari bo‘lishi kerak. Grek indeksi ishlatilsa, ayrim birhadgina tushuniladi: yig'indi tuzilmaydi, masalan, $a^{\alpha} \cdot \vec{\ni}_{\alpha}$ ifoda $a^1 \cdot \vec{\ni}_1$, $a^2 \cdot \vec{\ni}_2$ va $a^3 \cdot \vec{\ni}_3$ ifodalarning birini ifodalaydi. Tushunish qiyin emaski, $x_i^j \cdot y^i \equiv x_k^j \cdot y^k \equiv x_m^j \cdot y^m$ va h.k. o‘rinli bo‘ladi. Bunday indekslarga farqsiz indeks (nemoy indeks) deyiladi.

Vazifa.

Quyidagi ifodalarni to‘la ko‘rinishda yozing: $a_{ij} x^i x^j$, $x_{ki}(a^i + b^k)$.

Shunday qilib, umuman olganda, to‘g'riburchakli bo‘lmagan koordinatalar sistemasida $\vec{a} = a^i \cdot \vec{\ni}_i$, $a_i = (\vec{a} \cdot \vec{\ni}_i)$ ifodalarga ega bo‘lib, a^i -kontravariant, a_i-kovariant deb ataluvchi komponentalarga ega bo‘ldik. Endi $\vec{r} = \vec{r}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ radius vektorni olaylik. Bu yerda $\vec{r} = \vec{r}\{x^1, x^2, x^3\}$ va $x^i = x^i(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i} = \lim \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta \alpha}$ vektor chizig'iga urinma yo‘nalishda bo‘ladi. Fazoning har bir nuqtasida $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i}$ vektorlar bir tekislikda bo‘lmasa, ularni shu nuqtadagi bazis vektorlar sifatida olish mumkin. Bazis vektorlar mavjudligi uchun

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \alpha^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \alpha^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \alpha^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \alpha^3} \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lishi kerak. Bu shart bajarilsa, oshkormas funksiyalar ta'rifiga ko'ra

$\alpha^i = \alpha^i(x^i)$ deb yoza olamiz. Agar $\dfrac{\partial x^i}{\partial \alpha^j} \equiv x_j^i$ va $\dfrac{\partial \alpha^i}{\partial x^j} \equiv Y_j^i$ deb belgilasak,

bu matritsalar, ko'rish qiyin emaski, o'zaro teskari matritsalardan iborat bo'ladi. Endi $\vec{\text{Э}}_i = \partial\vec{r}/\partial\alpha^i$ ni egri chiziqli koordinat sistemasi bilan bog'liq har bir nuqtada keltirish mumkin.

Agar $\vec{e}_i$ lar birlik bazislar deb olinsa, $\vec{r} = x^j \cdot \vec{e}_j$ dan topa olamiz:

$$\vec{\text{Э}}_i = \frac{\partial(x^j \cdot \vec{e}_j)}{\partial \alpha^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \alpha^i} \cdot \vec{e}_j, \ \vec{e}_i = \frac{\partial \alpha^j}{\partial x^i} \cdot \vec{\text{Э}}_j = Y_i^j \cdot \vec{\text{Э}}_j$$

2. Endi fundamental matritsa tushunchasini kiritamiz va bazis vektor sifatida $\vec{\text{Э}}_i = \partial\vec{r}/\partial\alpha^i$ ni tuzamiz. U holda ixtiyoriy $\vec{a} = a^i \cdot \vec{\text{Э}}_i = a^i \cdot \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^i}$ bo'ladi.

Vektorning kovariant tashkil etuvchilari:

$$a_j = (\vec{a} \cdot \vec{\text{Э}}_j) = (\vec{a} \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^j}) = a^i \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^i} \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^j} = a^i \cdot (\vec{\text{Э}}_i \cdot \vec{\text{Э}}_j) \qquad (1.1)$$

$g_{ij} = (\vec{\text{Э}}_i \cdot \vec{\text{Э}}_j)$ simmetrik matritsa fundamental matritsa deyiladi. $g = det|g_{ij}| \neq 0$ bo'lgani uchun shunday g^{ij} matritsa mavjud bo'ladiki, u g_{ij} ga teskari bo'lib, ular ko'paytmasi birlik matritsani beradi:

$$g_{ik} \cdot g^{kj} = \delta_k^j \qquad (1.2)$$

$$\delta_i^j = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

(1.1) dan

$$a_j = a^i \cdot g_{ij} \qquad (1.3)$$

(1.3) ni g^{ik} ga ko‘paytirib, j bo‘yicha yig’indi olsak,

$$a_j \cdot g^{jk} = a^i \cdot g_{ij} \cdot g^{jk} = a^i \cdot \delta_i^k = a^k \qquad (1.4)$$

bo‘ladi.

Skalyar ko‘paytmani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a^i \cdot b^j \cdot g_{ij} = a^i \cdot b_i = g^{ji} \cdot a_j \cdot b_i = a_i \cdot b^i$$

Ushbu $\vec{э}^j = g^{ji} \cdot \vec{э}_i$ vektorlar $\vec{э}_i$ ga qo‘shma bazis vektorlar deyiladi:

$$\vec{э}^j = g^{ji} \cdot \vec{э}_i \qquad (1.5)$$

(1.5) ning har ikkala tomonini $\vec{э}_k$ ga ko‘paytiraylik:

$$\vec{э}^j \cdot \vec{э}_k = g^{ji} \cdot \vec{э}_i \cdot \vec{э}_k = g^{ji} \cdot g_{ik} = \delta_k^j$$

(1.5) ni $\vec{э}^k$ ga ko‘paytirsak, $\vec{э}^j \cdot \vec{э}^k = g^{jk}$ kelib chiqadi. Ko‘rish qiyin emaski, g^{ij} va g_{ij} matritsalar bilan vektorning indekslarini tushirish va ko‘tarish mumkin. Fazoning har bir nuqtasida uzunliklari birga teng bo‘lishi shart bo‘lmagan va o‘zaro tik bo‘lishi ham shart bo‘lmagan $\vec{э}_i$ bazis vektorlar orqali shu nuqtadagi biror fizik vektor kattalikning bir qiymatli yozish imkoniyati paydo bo‘ladi. $\vec{э}_i = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i}$ dan bu bazis vektorlar nuqtadan nuqtaga o‘tib kuzatilganda shu nuqtalar uchun, umuman olganda, o‘zgaruvchan $\vec{э}_1$, $\vec{э}_2$ va $\vec{э}_3$ uchliklarni beradi va fazoning nuqtalari uchun odatda yagona keng ishlatiladigan uchta $\vec{e}_i = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$ bazis vektorlar $\vec{э}_i$ bazis vektorlarning xususiy holi bo‘lib qoladi.

Vazifa

1. $\vec{э}_i = g_{ij} \cdot \vec{э}^j$ ligini ko‘rsating.

2. Silindrik koordinatalar sistemasida bazis vektorlar, qo'shma bazis vektorlar va metrik tenzor ifodalari yozilsin.
3. Sferik koordinat sistemasida bazis vektorlar, qo'shma bazis vektorlar va metrik tenzor ifodalari yozilsin.
4. Isbotlang: $\bar{\jmath}^1 = \dfrac{[\bar{\jmath}_2 \times \bar{\jmath}_3]}{\bar{\jmath}_1 \cdot [\bar{\jmath}_2 \times \bar{\jmath}_3]}$, $\bar{\jmath}^2 = \dfrac{[\bar{\jmath}_3 \times \bar{\jmath}_1]}{\bar{\jmath}_1 \cdot [\bar{\jmath}_2 \times \bar{\jmath}_3]}$.

1.3-§. KOORDINATALAR SISTEMASINI ALMASHTIRISH

Biz $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$-eski koordinatalar sistemasi bilan birga $(\alpha^{1'}, \alpha^{2'}, \alpha^{3'})$-yangi koordinatalar sistemasini olaylik. Bular o'rtasidagi munosabat ma'lum bo'lsin deylik:

$$\alpha^{i'} = \alpha^{i'}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \tag{1.6}$$

va unga teskari

$$\alpha^{i} = \alpha^{i}(\alpha^{1'}, \alpha^{2'}, \alpha^{3'}) \tag{1.7}$$

ma'lum bo'lsin deylik.

Agar $det\left|\dfrac{\partial \alpha^{i'}}{\partial \alpha^{i}}\right| \neq 0$ bo'lsa, $A_j^{i'}$ matritsaga teskari matritsa $B_{j'}^{j}$ mavjud va ularning ko'paytmasi birlik matritsani beradi:

$$A_j^{i'} \cdot B_{j'}^{j} = \delta_{j'}^{i'}.$$

Endi eski va yangi koordinatalar sistemasi uchun mos ravishda $\bar{\jmath}_i = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha^i}$ va $\bar{\jmath}_{i'} = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha^{i'}}$ bazis vektorlarni tuzaylik. Fazoning ixtiyoriy M nuqtasida $\bar{\jmath}_i$ va $\bar{\jmath}_{i'}$ bazis vektorlari o'rtasidagi munosabatni (1.6) va

(1.7) - koordinatalarni almashtirish formulalari orqali aniqlash mumkin.

Haqiqatan ham, ta'rifga ko'ra $\vec{э}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i}$ va shuningdek:

$$\vec{э}_{i'} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^{i'}} = \frac{\partial \vec{r}(\alpha^{1'},\alpha^{2'},\alpha^{3'})}{\partial \alpha^{i'}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^{k}} \cdot \frac{\partial \alpha^{k}}{\partial \alpha^{i'}} = \vec{э}_k \cdot B^k_{i'} \qquad (1.8)$$

Shuningdek, yoza olamiz:

$$\vec{э}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^{k'}} \cdot \frac{\partial \alpha^{k'}}{\partial \alpha^{i}} = \vec{э}_{k'} \cdot A^{k'}_i \qquad (1.9)$$

Shunday qilib, bazislarning o'zaro bog'lanishi (1.8) va (1.9) formulalar bilan aniqlanadi.

Biz yuqorida ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorning kontravariant va kovariant tashkil etuvchilarni ko'rdik. Tushunish qiyin emaski, $\vec{a}$ vektor invariant, ya'ni o'z qiymatini koordinatalar sistemasini almashtirganda o'zgartirmaydi. Masalan, moddiy nuqtaning tezligi turli o'zgarmas koordinatalar sistemalarida bir paytda turli bo'lishi mumkin emas, ya'ni tezlik-vektor invariantdir. Bu xulosadan vektorning kontravariant tashkil etuvchilari eski va yangi koordinat sistemasida bir xil degan xulosa chiqarish noto'g'ridir. Shu munosabat bilan koordinatalar sistemasini almashtirganda uning tashkil etuvchilari o'zgarishini ko'raylik: $\vec{a} = a^i \cdot \vec{э}_i$ ni olaylik. Bu vektor yangi $\alpha^{i'}$ koordinat sistemasida $\vec{a} = a^{i'} \cdot \vec{э}_{i'}$ bo'ladi. (1.8) formula asosida

$a^i \cdot \vec{э}_i = a^{i'} \cdot \vec{э}_{i'} = a^{i'} \cdot \vec{э}_k \cdot B^k_{i'}$ yoki baribir

$$a^k \cdot \vec{э}_k - a^{i'} \cdot \vec{э}_k \cdot B^k_{i'} = 0$$

$$(a^k - a^{i'} \cdot B^k_{i'}) \cdot \vec{э}_k = 0$$

$\vec{э}_k$ lar chiziqli erkli bo'lganligi uchun

$$a^k = a^{i'} \cdot B_{i'}^k = B_{i'}^k \cdot a^{i'} \tag{1.10}$$

(1.10) ni $A_k^{j'}$ ga ko'paytirib k bo'yicha yig'indi tuzaylik, u holda

$$A_k^{j'} \cdot a^k = A_k^{j'} \cdot B_{i'}^k \cdot a^{i'} = \delta_{i'}^{j'} \cdot a^{i'} = a^{j'} \tag{1.11}$$

ya'ni

$$a^{i'} = A_k^{i'} \cdot a^k .$$

Misollar:

1. Yuqorida isbotlangan (3.3), (3.4), (3.5) va (3.6) formulalarga o'xshash quyidagi almashtirish formulalari to'g'riligi isbotlansin:

$$a_{j'} = a_j \cdot B_{j'}^j .$$

2. Isbotlang:

$$g_{i'j'} = g_{ij} \cdot B_{i'}^i \cdot B_{j'}^j .$$

Isbot:

$$g_{i'j'} = (\vec{\jmath}_{i'} \cdot \vec{\jmath}_{j'}) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^{i'}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^{j'}} \right) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^{i}} \cdot \frac{\partial \alpha^{i}}{\partial \alpha^{i'}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^{j}} \frac{\partial \alpha^{j}}{\partial \alpha^{j'}} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^{i}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^{j}} \right) \cdot B_{i'}^i \cdot B_{j'}^j = g_{ij} \cdot B_{i'}^i \cdot B_{j'}^j .$$

1.4-§. KRISTOFFELNING 1 - VA 2 - TUR SIMVOLLARI

Ushbu $\dfrac{\partial \vec{\jmath}_i}{\partial \alpha^j}$ vektorni $\vec{\jmath}_1, \vec{\jmath}_2, \vec{\jmath}_3$ bazis vektorlari orqali ifodalaylik

$$\frac{\partial \vec{\jmath}_i}{\partial \alpha^j} = \Gamma_{ij}^k \cdot \vec{\jmath}_k \tag{1.12}$$

Γ_{ij}^k - miqdor Kristoffelning 2-tur simvoli deyiladi. $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ dir, ya'ni Kristoffelning 2-tur simvoli quyi indekslari bo'yicha simmetrikdir.

Kristoffel simvollarini metrik tenzor bo‘yicha ifodalab yozish mumkin. Buning uchun g_{ij} dan α^k bo‘yicha hosila olaylik:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial(\vec{\mathfrak{z}}_i \cdot \vec{\mathfrak{z}}_j)}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial \vec{\mathfrak{z}}_i}{\partial \alpha^k} \cdot \vec{\mathfrak{z}}_j + \vec{\mathfrak{z}}_i \cdot \frac{\partial \vec{\mathfrak{z}}_j}{\partial \alpha^k} =$$

$$= \Gamma_{ik}^m \cdot \vec{\mathfrak{z}}_m \cdot \vec{\mathfrak{z}}_j + \vec{\mathfrak{z}}_i \cdot \Gamma_{jk}^m \cdot \vec{\mathfrak{z}}_m = \Gamma_{ik}^m \cdot g_{mj} + \Gamma_{jk}^m \cdot g_{im}$$

Yoza olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k} &= \Gamma_{ik}^m \cdot g_{mj} + \Gamma_{jk}^m \cdot g_{mi} \\ \frac{\partial g_{kj}}{\partial \alpha^i} &= \Gamma_{ki}^m \cdot g_{mj} + \Gamma_{ji}^m \cdot g_{mk} \\ \frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^j} &= \Gamma_{ij}^m \cdot g_{mk} + \Gamma_{kj}^m \cdot g_{mi} \end{aligned} \tag{1.13}$$

(1.13) dan yoza olamiz:

$$2 \cdot \Gamma_{ij}^m g_{mk} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k}$$

Bu ifodani $\frac{1}{2} \cdot g^{kl}$ ga ko‘paytirib, k bo‘yicha yig’indi olaylik:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \Gamma_{ij}^m g_{mk} \cdot g^{kl} \cdot \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \cdot g^{kl} \cdot \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k}\right) \\ \Gamma_{ij}^m \cdot \delta_m^l &= \frac{1}{2} \cdot g^{kl} \cdot \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k}\right) \\ \Gamma_{ij}^l &= \frac{1}{2} \cdot g^{kl} \cdot \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k}\right) \end{aligned} \tag{1.14}$$

(1.14) formula bilan Kristoffelning 2-tur simvollarini metrik tenzor elementlari orqali hisoblash mumkin. Kristoffelning 1-tur simvollari deb, ta’rifga ko‘ra, quyidagi miqdorlar olinadi:

$$\Gamma_{ij,k} \equiv g_{km} \cdot \Gamma_{ij}^m \tag{1.15}$$

U holda (1.14) dan:

$$\Gamma_{ij,k}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial\alpha^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial\alpha^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial\alpha^k}\right)$$

Ko'rish qiyin emaski, $\Gamma_{ij,k}$ i va j indekslari bo'yicha simmetrikdir:

$$\Gamma_{ij,k}=\Gamma_{ji,k}.$$

1.5-§. VEKTORNING KONTRAVARIANT VA KOVARIANT KOMPONENTALARIDAN OLINGAN KOVARIANT HOSILALAR

Dekart koordinatalar sistemasida ixtiyoriy vektorni shu fazo uchun umumiy (miqdor va yo'nalishlari bir xil bo'lgan) bazis vektorlar orqali ifodalash mumkinligi ma'lum. Agar bazis vektorlar sifatida shu fazodagi egri chiziqli koordinatalar sistemasiga mos holda har bir nuqtada loaqal $\vec{\text{э}}_i$ bazis vektorlar olinadigan bo'lsa, u holda $\vec{\text{э}}_i$ lar α^i larga bog'liqligi e'tiborda bo'lishi kerak. $\vec{a}=a^i\cdot\vec{\text{э}}_i$ dan α^k bo'yicha hosila olaylik:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{a}}{\partial\alpha^k}&=\frac{\partial a^i}{\partial\alpha^k}\cdot\vec{\text{э}}_i+a^i\cdot\frac{\partial\vec{\text{э}}_i}{\partial\alpha^k}=\frac{\partial a^m}{\partial\alpha^k}\cdot\vec{\text{э}}_m+a^i\cdot\Gamma^m_{ik}\cdot\vec{\text{э}}_m=\\&=\left(\frac{\partial a^m}{\partial\alpha^k}+a^i\cdot\Gamma^m_{ik}\right)\cdot\vec{\text{э}}_m=\nabla_k a^m\cdot\vec{\text{э}}_m=a^m_{,k}\cdot\vec{\text{э}}_m\end{aligned}\tag{1.16}$$

$\nabla_k a^m\equiv a^m_{,k}\equiv\dfrac{\partial a^m}{\partial\alpha^k}+a^i\cdot\Gamma^m_{ik}$ vektorning a^m kontravariant tashkil etuvchisidan olingan kovariant hosila deyiladi. (1.16) formula asosida yoza olamiz:

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial\alpha^k}=a_{m,k}\cdot\vec{\text{э}}^m$$

va $a_{m,k}$ ni $\vec{a}$ ning kovariant komponentasidan olingan kovariant hosila deb aniqlaymiz.

Yuqoridagi ifodani $\vec{\ni}_n$ ga skalyar ko'paytiraylik, u holda topamiz:

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \alpha^k} \cdot \vec{\ni}_n = a_{m,k} \cdot \vec{\ni}^m \cdot \vec{\ni}_n = a_{m,k} \cdot \delta_n^m = a_{n,k}$$

$a_j = (\vec{a} \cdot \vec{\ni}_j)$ dan α^k bo'yicha hosila olaylik:

$$\frac{\partial a_j}{\partial \alpha^k} = \left(\frac{\partial \vec{a}}{\partial \alpha^k} \cdot \vec{\ni}_j \right) + \left(\vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{\ni}_j}{\partial \alpha^k} \right) = a_{j,k} + \vec{a} \cdot \Gamma_{jk}^m \cdot \vec{\ni}_m \qquad (1.17)$$

Bundan

$$a_{j,k} = \frac{\partial a_j}{\partial \alpha^k} - \Gamma_{jk}^m \cdot a_m \qquad (1.18)$$

(1.18) $\vec{a}$ ning kovariant tashkil etuvchisi a_j dan olingan kovariant hosila ifodasini beradi.

1.6-§. GEOMETRIK OBYEKTLAR. TENZORNING TA'RIFI

Tenzor tushunchasini ko'rishdan ilgari biror egri chiziqli koordinata sistemasining har bir nuqtasida berilgan 3^{n+m} ta ushbu sonlarni olaylik:

$$Q^{i_1, i_2, \dots, i_n}{}_{j_1, j_2, \dots, j_m}$$

U holda fazoda Q ekstensiv aniqlangan deyiladi va uning rangi $n+m$ ga teng deyiladi. n- kontravariant komponentalari, m- esa kovariant komponentalari deyiladi. Misol uchun yuqorida ko'rilgan a^i yoki a_i lar rangi 1 ga teng bo'lgan ekstensiv bo'la oladi.

Tenzor ta'rifi. Agar Q ekstensiv komponentalari: $\alpha^{i'} = \alpha^{i'}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ formulalari bilan koordinata sistemalarini almashtirganda quyidagi formula bo'yicha o'zgarsa, ya'ni

$$Q^{i_1' i_2' \ldots i_n'}{}_{j_1' j_2' \ldots j_m'} = A_{i_1}^{i_1'} \cdot A_{i_2}^{i_2'} \cdots A_{i_n}^{i_n'} \cdot B_{j_1'}^{j_1} \cdot B_{j_2'}^{j_2} \cdots B_{j_m'}^{j_m} \cdot Q^{i_1 i_2 \ldots i_n}{}_{j_1 j_2 \ldots j_m} \quad (1.19)$$

bo'lsa, u holda Q ekstensiv ko'rilayotgan koordinat sistemasini almashtirish formulasiga nisbatan **tenzor** deyiladi.

Bir koordinat sistemasini almashtirish formulalariga nisbatan tenzor bo'lgan ekstensiv, ikkinchisiga nisbatan tenzor bo'lmasligi mumkin.

Misol sifatida yuqorida ko'rilgan g_{ij}, g^{ij}, $\delta^i{}_{j'}$ larning 2 rang tenzorligini ko'raylik. g_{ij} ning biror $\alpha^{i'} = \alpha^{i'}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ ga nisbatan $m = 2$ (rangi 2 ga teng) tenzorligini ko'rsataylik.

Isbot. $g_{i'j'} = (\vec{\ni}_{i'} \cdot \vec{\ni}_{j'}) = (\vec{\ni}_i \cdot B_{i'}^i \cdot \vec{\ni}_j \cdot B_{j'}^j) = B_{i'}^i \cdot B_{j'}^j \cdot g_{ij}$

Demak, ta'rifga ko'ra g_{ij}-tenzor.

Eslatma: agar a_{ij} tenzor elementlari bo'lsa, bunday tenzorni qisqartirib, ko'pincha a_{ij} tenzori deb ham ataladi.

1.7-§. TENZORLAR USTIDA AYRIM AMALLAR, TENZORLAR ALGEBRASI

TMMda ko'pincha 2, 4 rang tenzorlar bilan ish ko'riladi. Tenzorlar ustida amallarni 2 rang tenzorlari misolida ko'raylik:

a) **indekslarni almashtirish**: tenzor A va uning elementlarini a_{ij} deylik. Bu tenzor indekslari almashtirishdan, ya'ni $a_{ij} \to a_{ji}$ dan V tenzor hosil qilish mumkin. $a_{ij} = a_{ji}$ bo'lsa, tenzor simmetrik deyiladi:

b) **tenzorlarni qo'shish (ayirish)**

$$A + B = C$$

$$a^{ij} + b^{ij} = c^{ij}$$

1 rang tenzorlarni qo'shish bu - vektorlarni qo'shish demakdir.

c) **tenzorlarni simmetriklash, alternirlash**: a_{ij} tenzor elementlari bo'lib, shu tenzorni simmetriklash va alternirlashni ko'raylik

$$a_{(ij)} = (a_{ij} + a_{ji})$$

simmetrik va

$$a_{[ij]} = a_{ij} - a_{ji}, \quad a_{[ij]} = -a_{[ji]}$$

bo'ladi.

Istalgan tenzor uchun esa

$$a_{ij} = \frac{1}{2} a_{(ij)} + \frac{1}{2} a_{[ij]}$$

Haqiqatan ham, yuqoridan:

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) + \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$$

Bu yerdagi birinchi yig'indi simmetrik, ikkinchi yig'indi alternirlangan tenzor deyiladi.

d) **indekslarni ko'tarish va tushirish**: ushbu

$$a_k^j = a^{ij} g_{ik}, \quad a^{ij} g_{jk} = a_k^i$$

o'rinli bo'lishini ko'rish qiyin emas. Shuningdek,

$$a^{ij}\cdot g_{ik}\cdot g_{jm}=a_{km},\quad b_{ij}\cdot g^{ik}\cdot g^{jm}=b^{km}$$

e) **tenzorlarni ko'paytirish**

$$a^{ij}\cdot b_{kl}=c^{ij..}_{..kl}$$

$$a_i\cdot b_j=c_{ij}$$

tenzorlarni ko'paytirganda, ularning rangi qo'shiladi;

f) **tenzorlarni svyortkalash amali:** c_{ijkl} tenzor berilgan bo'lsin deylik. Agar bu tenzorning ikki indeksini bir xil qilib olib (bu indeks bo'yicha yig'indi tuzilsa), yangi tenzor berilgan tenzorni svyortkalash orqali tuzilgan deyiladi.

Masalan:

$$c_{kjkl}=c_{1j1l}+c_{2j2l}+c_{3j3l}=b_{jl}$$

c_{ijkl} - 4 rang tenzor edi. b_{jl} esa 2 rang tenzordir;

j) **tenzorlarni ko'paytirish va svyortkalash amalining birgalikda olinishi**:

Masalan:

$$c^{ijkl}\cdot\varepsilon_{ij}=\sigma^{kl}.$$

Vazifa:

1. $\dfrac{\partial a^i}{\partial\alpha^j}$ va $\dfrac{\partial a_i}{\partial\alpha^j}$ tenzor emasligi ko'rsatilsin.

2. $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial\alpha^k}=\Gamma_{ki,j}+\Gamma_{kj,i}$ ligini isbotlang.

3. $\Gamma^j_{jk}=\dfrac{1}{2}g^{ik}\cdot\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial\alpha^k}$ ligini isbotlang.

1.8-§. DIADALAR

Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ lar orqali tuzilgan ushbu ifoda $\underline{D}=\vec{a}\otimes\vec{b}$ diada deyiladi. $\vec{a}$- diadaning chap vektori, $\vec{b}$ - diadaning o‘ng vektori deyiladi. $\otimes$ simvoli diadik ko‘paytma simvoli, $a^i b^j$ - sonlari to‘plamini esa $\underline{D}$ ning komponentalari deyiladi.

$$\begin{pmatrix} a^1b^1 & a^1b^2 & a^1b^3 \\ a^2b^1 & a^2b^2 & a^2b^3 \\ a^3b^1 & a^3b^2 & a^3b^3 \end{pmatrix}$$

$\vec{a}$ ning eski $(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$ dagi kontravariant komponentalari a^i, $\vec{b}$ niki b^i bo‘lib, ya’ni $(\alpha^{1'},\alpha^{2'},\alpha^{3'})$ koordinata sistemasida mos ravishda $a^{i'}$ va $b^{j'}$ bo‘lsa, u holda $a^{i'}=A_i^{i'}\cdot a^i$, $b^{j'}=B_j^{j'}\cdot b^j$ bo‘lib, ushbu formula o‘rinlidir:

$$a^{i'}\cdot b^{j'}=A_i^{i'}\cdot B_j^{j'}\cdot b^j a^i .$$

Bundan ta’rifga ko‘ra, $\underline{D}$ ning tenzorligi (rangi 2 ga teng) kelib chiqadi.

$\underline{D}=\vec{a}\otimes\vec{b}$ ni chap tomonidan $\vec{c}$ ga ko‘paytiraylik. Ta’rifga ko‘ra

$$\vec{c}\cdot\underline{D}=\vec{c}\cdot\vec{a}\otimes\vec{b}=\chi\cdot\vec{b}$$

deb olinadi.

$\vec{\text{э}}_i$ va $\vec{\text{э}}^i$ lardan tuzilgan $\underline{E}$ diada **birlik diada** deyiladi:

$$\underline{E}=(\vec{\text{э}}^i\otimes\vec{\text{э}}_i)$$

$\vec{a}$ ni birlik diadaga chap va o‘ng tomondan skalyar ko‘paytirsak quyidagini topamiz:

$$\vec{a}\cdot\underline{E}=\vec{a}\cdot(\vec{\text{э}}^i\otimes\vec{\text{э}}_i)=a^i\cdot\vec{\text{э}}_i=\vec{a}$$

$$\underline{E}\cdot\vec{a}=(\vec{\text{э}}^i\otimes\vec{\text{э}}_i)\cdot\vec{a}=a_i\cdot\vec{\text{э}}^i=\vec{a}$$

Diada uchun $\vec{\ni}_i \otimes \vec{\ni}_j$ bazis bo'ladi:

$$\underline{D} = \vec{a} \otimes \vec{b} = a^i \cdot \vec{\ni}_i \otimes b^j \cdot \vec{\ni}_j = a^i \cdot b^j \cdot (\vec{\ni}_i \otimes \vec{\ni}_j)$$

$a^i \cdot b^j = c^{ij}$ desak, $T = c^{ij} \cdot (\vec{\ni}^i \otimes \vec{\ni}_i)$ tenzorga ega bo'lamiz. $\vec{\ni}_i \otimes \vec{\ni}_j$- ***bazislar*** deb ataladi.

Yuqorida kiritilgan tenzor $T = c^{ij}\left(\vec{\ni}_i \otimes \vec{\ni}_j\right)$ invariant miqdor bo'lib, $\alpha^{i'}$ ва α^i koordinatalariga nisbatan yozilganda

$$c^{i'j'}\left(\vec{\ni}_{i'} \otimes \vec{\ni}_{j'}\right) = c^{ij}\left(\vec{\ni}_i \otimes \vec{\ni}_j\right)$$

bo'ladi.

Bu yerda $c^{i'j'}$, $\alpha^{i'}$ koordinatalar sistemasida, c^{ij} esa α^i koordinatalar sistemasida aniqlangan. Bular o'rtasidagi munosabat koordinatalar sistemasini almashtirganda rangi ikki bo'lgan $c^{ij} = a^i \cdot b^j$ tenzor ta'rifidan topiladi.

$$c^{ij} = B^i_{i'} \cdot B^j_{j'} \cdot c^{i'j'} = B^i_k \cdot B^j_n \cdot c'^{kn}$$
$$c'^{ij} = A^{i'}_k \cdot A'^j_n \cdot c^{kn}, c^{i'j'} = c'^{kn}$$
$$c^{i'j'} = A^{i'}_i \cdot A^{j'}_j \cdot c^{ij}, c^{ij} = B^i_{i'} \cdot B^j_{j'} \cdot c^{i'j'}$$

bu yerda

$$A^{i'}_i = \frac{\partial \alpha^{i'}}{\partial \alpha^i}, B^i_{i'} = \frac{\partial \alpha^i}{\partial \alpha^{i'}}.$$

Olingan natijalarni rangi $n \geq 2$ bo'lgan tenzorlar uchun ham umumlashtirish mumkin. Agar $n=4$ da $T = A^{ijlm}\left(\vec{\ni}_i \otimes \vec{\ni}_j \otimes \vec{\ni}_l \otimes \vec{\ni}_m\right)$ invariant miqdor-tenzor kiritilsa, $\alpha^{i'}$ ва α^i koordinatalar o'rtasida $\alpha^{i'} = \alpha^{i'}\left(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3\right)$ munosabat ma'lum bo'lganda, tenzor elementlari ushbu formulalarga ko'ra almashiladilar:

$$A^{i'j'l'm'} = \frac{\partial\alpha^{i'}}{\partial\alpha^{i}} \cdot \frac{\partial\alpha^{j'}}{\partial\alpha^{j}} \cdot \frac{\partial\alpha^{l'}}{\partial\alpha^{l}} \cdot \frac{\partial\alpha^{m'}}{\partial\alpha^{m}} \cdot A^{ijlm}$$

bo'ladi.

1.9-§. TENZOR KOVARIANT HOSILASI. ABSOLYUT DIFFERENSIAL

Endi tenzorning kovariant hosilasini tuzish bilan shug'ullanamiz. Dastlabki paragraflarimizdan ma'lumki, skalyar va vektorlar mos ravishda ranglari nolga va 1 ga teng tenzorlardir. Rangi 0 ga teng tenzor - skalyardan olingan hosila - bu xususiy hosilalar.

Rangi 1 ga teng tenzor - vektordan olingan hosilani ko'rgan edik. Aniqrog'i $\bar{a}$ vektorning kontravariant va kovariant tashkil etuvchilaridan olingan hosila quyidagicha edi:

$$\nabla_k a^i = \frac{\partial a^i}{\partial\alpha^k} + \Gamma^i_{km} a^m \qquad (1.20)$$

$$\nabla_k a_i = \frac{\partial a_i}{\partial\alpha^k} - \Gamma^m_{ki} a_m \qquad (1.21)$$

Rangi 2 bo'lgan tenzordan olingan hosilani ko'raylik:

$$\frac{\partial T}{\partial\alpha^k} = \frac{\partial c^{ij}}{\partial\alpha^k} \cdot (\vec{э}_i \otimes \vec{э}_j) + c^{ij} \cdot \frac{\partial \vec{э}_i}{\partial\alpha^k} \otimes \vec{э}_j + c^{ij} \cdot \vec{э}_i \otimes \frac{\partial \vec{э}_j}{\partial\alpha^k} =$$

$$= \frac{\partial c^{ij}}{\partial\alpha^k} \cdot (\vec{э}_i \otimes \vec{э}_j) + c^{ij} \cdot \Gamma^m_{ik}\, \vec{э}_m \otimes \vec{э}_j + c^{ij} \cdot \vec{э}_i \otimes \Gamma^m_{jk} \cdot \vec{э}_m =$$

$$= \left(\frac{\partial c^{ij}}{\partial\alpha^k} + c^{mj} \cdot \Gamma^i_{km} + c^{im} \cdot \Gamma^j_{km}\right) \cdot (\vec{э}_i \otimes \vec{э}_j)$$

Bu erda qavs ichidagi ifoda tenzor kontravariant tashkil etuvchilaridan olingan hosila deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\nabla_k c^{ij} = \frac{\partial c^{ij}}{\partial \alpha^k} + \Gamma^i_{km} \cdot c^{mj} + \Gamma^j_{km} \cdot c^{im}$$

Shuningdek, topish mumkinki,

$$\nabla_k c_{ij} = \frac{\partial c_{ij}}{\partial \alpha^k} - \Gamma^m_{ki} \cdot c_{mj} - \Gamma^m_{kj} \cdot c_{im}$$

Shunday qilib, biz ushbu formulalarga ega bo'ldik:

$$\nabla_k c^{ij} = \frac{\partial c^{ij}}{\partial \alpha^k} + \Gamma^i_{km} \cdot c^{mj} + \Gamma^j_{km} \cdot c^{im} \qquad (1.22)$$

$$\nabla_k c_{ij} = \frac{\partial c_{ij}}{\partial \alpha^k} - \Gamma^m_{ki} \cdot c_{mj} - \Gamma^m_{kj} \cdot c_{im} \qquad (1.23)$$

T tenzorning absolyut differensiali deb shu tenzorning kovariant hosilasini egri chiziqli koordinatalar differensiallariga ko'paytirib olingan svertkasiga aytiladi:

$$Dc^{ij} = \nabla_k c^{ij} d\alpha^k, \quad Dc_{ij} = \nabla_k c_{ij} d\alpha^k \qquad (1.24)$$

Metrik tenzordan olingan kovariant hosila nolga tengligi tenzor analizida Richchi (1853-1925) teoremasi bilan ma'lumdir $\nabla_k g_{ij} = 0$.

Uning to'g'riligini isbotlaymiz. Yuqorida keltirilgan 2 rang tenzor s_{ij} dan olingan kovariant hosila formulasida $s_{ij} = g_{ij}$ deb olaylik

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k} - \Gamma^m_{ki} g_{jm} - \Gamma^m_{kj} g_{im}.$$

Yoza olamiz:

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k} - \Gamma_{ki,j} - \Gamma_{kj,i} = 0$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial \alpha^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial \alpha^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial \alpha^j}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial \alpha^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial \alpha^i}\right) = 0 \qquad (1.25)$$