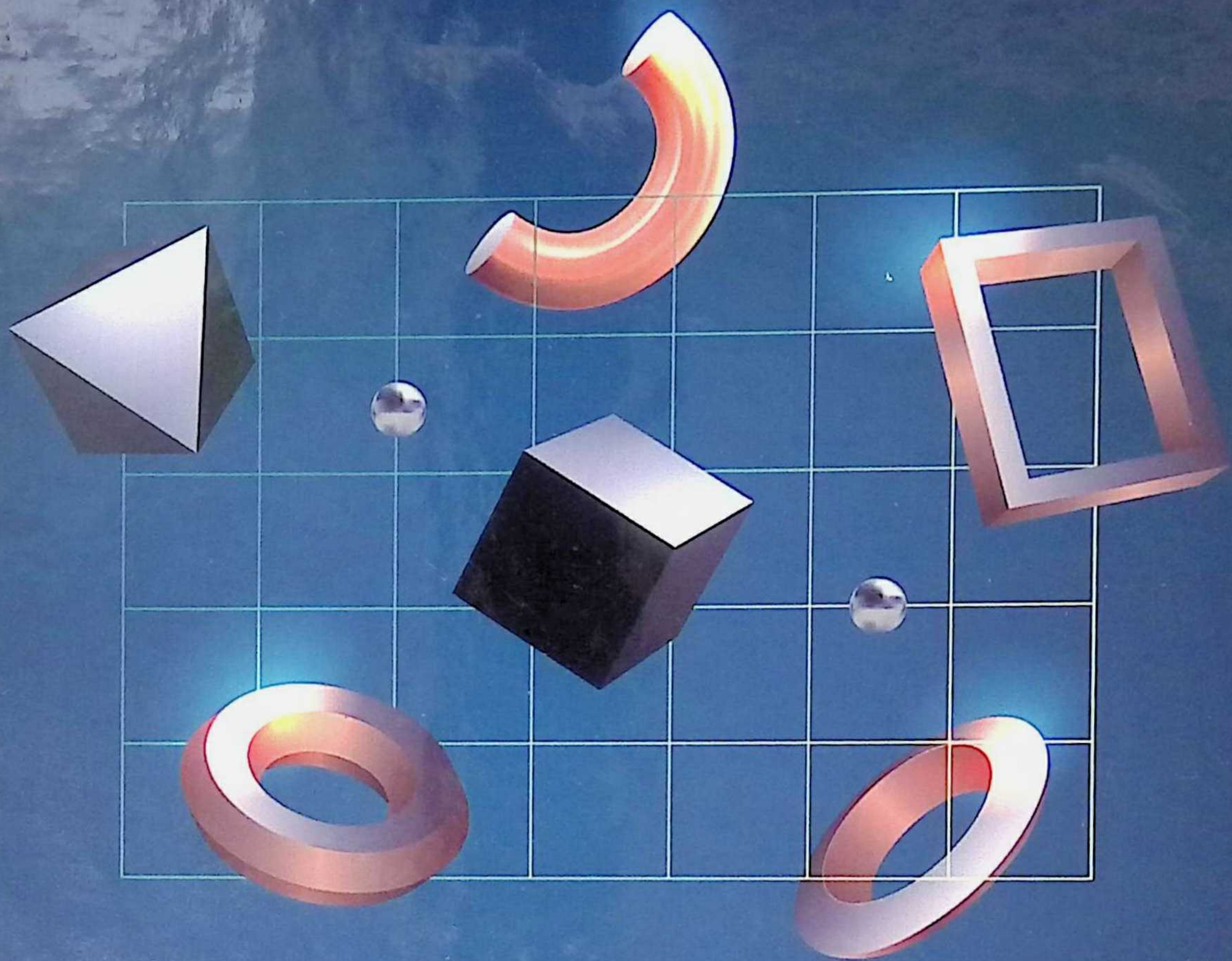

Narmanov Abdigappar Yakubovich

DIFFERENSIAL GEOMETRIYA VA TOPOLOGIYA

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYA VAZIRLIGI

MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

Narmanov Abdigappar Yakubovich

DIFFERENSIAL GEOMETRIYA VA TOPOLOGIYA

DARSLIK

Bakalavriatning 5130100- matematika yo'nalishi uchun qayta ishlangan uchinchi nashri

O'zMU
MATEMATIKA
FAKULTETI
ARM

BUXORO – 2024
«DURDONA» nashriyoti

22.151+22.152ya7
514.7+515.1(075)
N 25
Narmanov Abdigappar Yakubovich
Differensial geometriya va topologiya [Matn] : darslik / Narmanov Abdigappar Yakubovich – Buxoro: Sadriddin Salim Buxoriy» Durdona nashriyoti, - 2024. – 248 b.

UO'K 514.7+515.1(075)
KBK 22.151+22.152ya7

TAQRIZCHILAR:

R.Beshimov – O'zbekiston Milliy Universiteti professori.

T.Jo'raev – Nizomiy nomidagi Toshkent Davlat universiteti professori.

Bu darslik bakalavriatning 5130100- matematika yo'nalishi uchun mo'ljallangan bo'lib, amaldagi yangi bakalavrlar dasturi asosida yozilgan. Darslik to'rtta qismdan iborat bo'lib, unda umumiy topologiya elementlari, chiziqlar va sirtlar nazariyasi, tenzor analiz elementlari yoritilgan. Darslikdan magistr, ilmiy-tadqiqotchilar va oliy o'quv yurtlari o'qituv-chilari ham foydalanishlari nazarda tutilgan.

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi 2022 – yil 9–sentabrdagi "302" – sonli buyrug'iga asosan darslik sifatida tavsiya etilgan. Ro'yxatga olish raqami 302 - 101

ISBN 978-9910-04-449-6 **© Narmanov Abdigappar Yakubovich.**

O'zMU
AXBOROT-RESURS
MARKAZI
2024/145
12

DARSLIK

MUNDARIJA

IV BOB TENZOR ANALIZ ELEMENTLARI

Kirish

Differensial geometriya kursida uch o'lchamli fazodagi chiziqlar va sirtlar matematik analiz yordamida o'rganiladi. Ma'lumki, analitik geometriya kursida chiziqlar va sirtlarni o'rganish ularning tenglamalarini tekshirish yordamida amalga oshiriladi. Shuning uchun algebraik metodlar analitik geometriya kursida asosiy ro'l o'ynaydi. Differensial geometriya kursida biz chiziq va sirtlarni tenglamalar yordamida emas, balki fazodagi ma'lum xossalarga ega bo'lgan figuralar sifatida aniqlaymiz va ularni matematik analiz yordamida o'rganish uchun differensialanuvchi funksiyalar yordamida parametrlaymiz. Geometriyada matematik analiz metodlarini tadbiq qilishga Peterburg fanlar akademiyasi a'zosi L.Eyler katta hissa qo'shdi. U chiziqni parametrlash, sirt nuqtasida bosh yo'nalishlar kabi muhim tushunchalarni kiritdi va juda ajoyib teoremalarni isbot qildi. Differentsial geo-metriyaning asosiy masalalari sistematik ravishda yoritilgan birinchi asarni Gaspar Monj yozdi. Uning «Cheksiz kichiklar analizining geometriyaga tadbiqi» nomli kitobi 1795 yili chop etildi. G. Monjning shogirdlari D'yupen, Men'e ham sirtlar nazariyasiga katta hissa qushdilar.

Geometriya fani XIX asrda juda tez rivojlandi. 1826 yili buyuk matematik N.I. Lobachevskiy Evklid geometriyasidan farqli geometriya mavjud ekanligini ko'rsatdi. Bu geometriyada geodezik uchburchak ichki burchaklari yig'indisi 180° dan kichikdir. Gauss 1827 yili sirtning to'liq egriligi uning ichki geometriyasiga tegishli ekanligini isbotladi. B.Riman 1854 yili Lobachevskiy geometriyasini ham o'z ichiga oluvchi yangi geometriyani asoslab berdi. Bu geometriya Riman geometriyasi deb ataladi. Riman geometriyasida geodezik uchburchaklar ichki burchaklar yig'indisi 180° dan katta ham, kichik ham bo'lishi mumkin.

XX asrda differensial geometriyaning rivojlanishida chiziqlar va sirtlar o'rniga har xil differensial strukturalar kiritilgan silliq ko'pxilliklarni o'rganish tendensiyasi paydo bo'ldi va rivojlandi. Bu ob'ektlarni (silliq ko'pxilliklarni) o'rganish qulayligi shundaki, ular chiziqlar va sirtlar kabi Evklid fazosining qism to'plamlari sifatida emas, balki differensial struktura kiritilgan abstrakt topologik fazolar sifatida aniqlanadi. Ko'pxilliklar nazariyasida chiziqlar va sirtlar mos ravishda bir o'lchamli va ikki o'lchamli ko'pxilliklarni tashkil etadi. Hozirgi vaqtda ko'pxilliklar nazariyasi geometriya kursining asosiy qismlardan biri bo'lib qoldi. Mexanika va fizikada uchraydigan jarayonlarni ham differensiallanuvchi ko'p-xilliklar ustida modellashtirish qulay bo'lib, bu jarayon riman geometriyasining muhim ahamiyatga ega ekanligini ko'rsatmoqda.

I BOB UMUMIY TOPOLOGIYA ELEMENTLARI

Bu bob differensial geometriya kursini o'rganishda zarur bo'ladigan umumiy topologiyaning asosiy tushunchalariga bag'ishlangan.

§ 1. Evklid fazosidagi topologiya

Haqiqiy sonlar to'plamini R^1 bilan belgilaymiz va $n \geq 1$ uchun elementlari n ta tartiblangan haqiqiy sonlar ketma-ketligidan iborat

$$R^n = \{(x^1, x^2, \ldots, x^n) : x^i \in R^1, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

to'plamda $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ va $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$ nuqtalar orasidagi masofani

$$d(x, y) = \sqrt{(y^1 - x^1)^2 + (y^2 - x^2)^2 + \ldots + (y^n - x^n)^2}$$

formula bilan aniqlaymiz.

Bu kiritilgan $d : R^n \times R^n \to R^1$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi.

1) musbat aniqlangan: ixtiyoriy $x, y \in R^n$ juftlik uchun $d(x, y) \geq 0$ bo'lib, $d(x, y) = 0$ bo'lishi uchun $x = y$ munosabatning bajarilishi zarur va yetarlidir.

2) Simmetrik funksiyadir: ixtiyoriy x, y juftlik uchun $d(x, y) = d(y, x)$ munosabatlar o'rinli.

3) uchburchak tengsizligini qanoatlantiradi: ixtiyoriy x, y, z uchta nuqta uchun $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ tengsizlik bajariladi.

Yuqorida $d(x, y)$ funksiyaning 1, 2-shartlarni qanoatlantirishi ravshan. Bu shartlarning uchinchisi sizga matematik analiz kursidan ma'lum bo'lgan

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1}$$

tengsizlikdan kelib chiqadi.

Quyida Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi deb ataluvchi

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \qquad (1.2)$$

tengsizlikni isbotlab, undan yuqoridagi (1.1) tengsizlikni keltirib chiqaramiz. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi vektor ko'rinishda $(\vec{a},\vec{b})^2 \le \vec{a}^2\vec{b}^2$ yozish mumkin. Bu tengsizlikda $(\vec{a},\vec{b})$ -ifoda $\vec{a}=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$, $\vec{b}=\{b_1,b_2,\dots,b_k\}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi bo'lib, $\vec{a}^2=(\vec{a},\vec{a})$, $\vec{b}^2=(\vec{b},\vec{b})$ belgilashlar qabul qilingan. Skalyar ko'paytmadan iborat bo'lgan va haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan $f(t)=(\vec{a}+t\vec{b})^2$ funksiyani qaraylik. Bu funksiyaning aniqlanishiga ko'ra $f(t)\ge 0$ munosabat o'rinlidir. Bu tengsizlikni $f(t)=\vec{a}^2+2t(\vec{a},\vec{b})+t^2\vec{b}^2\ge 0$ ko'rinishda yozsak, u kvadrat tengsizlikka aylanadi. Uning diskriminanti uchun

$$(\vec{a},\vec{b})^2-\vec{a}^2\vec{b}^2\le 0$$

tengsizlikni yoza olamiz. Endi Koshi-Bunyokovskiy tengsizligidan foydalanib,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot b_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\le\sum_{k=1}^{n}a_k^2+$$

$$+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2=\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)^2$$

tengsizlikni hosil qilamiz.Bu tengsizlikdan yuqoridagi (1.1) tengsizligi kelib chiqadi.

Endi (1.1) tengsizlikdan foydalanib, d funksiya uchun uchburchak tengsizligini isbotlaylik.Buning uchun $x=(x^1,x^2,\dots,x^n)$, $y=(y^1,y^2,\dots,y^n)$, $z=(z^1,z^2,\dots,z^n)$ nuqtalar uchun $a^k=x^k-z^k, b^k=z^k-y^k$ belgilashlar kiritsak, (1.1) tengsizlikdan $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$ tengsizlik kelib chiqadi. Kiritilgan d funksiya bilan birgalikda R^n metrik fazo bo'ladi.

Evklid fazoda berilgan x nuqta va $r>0$ soni uchun

$$B_r(x)=\{y\in R^n : d(x,y)<r\}$$

to'plam markazi x nuqtada va radiusi r ga teng *ochiq shar* deb,

$$\overline{B_r}(x)=\{y\in R^n : d(x,y)\leq r\}$$

to'plam esa markazi x nuqtada bo'lgan va radiusi r ga teng *yopiq shar* deb ataladi.

Sonlar o'qida, ya'ni R^1 da $B_r(x)$ ochiq shar $(x-r, x+r)$ ochiq interval, yopiq $B_r(x)$ shar esa $[x-r, x+r]$ yopiq kesma bo'ladi.

Endi ochiq shar yordamida R^n fazoda ochiq to'plam tushunchasini kiritamiz. Berilgan A to'plam va unga tegishli a nuqta uchun birorta $r>0$ soni mavjud bo'lib $B_r(a)\subset A$ munosabat o'rinli bo'lsa, a nuqta A to'plamning *ichki nuqtasi* deyiladi. Hamma nuqtalari ichki nuqtalar bo'lgan to'plam *ochiq to'plam* deb ataladi.

Demak, har qanday ochiq shar ochiq to'plam bo'ladi, chunki $x\in B_r(a)$ bo'lsa, $r_x=\min\{d(a,x), r-d(a,x)\}>0$ soni uchun $B_{r_x}(x)\subset B_r(a)$ bo'ladi. Haqiqatan $y\in B_{r_x}(x)$ bo'lsa,

$d(a,y)\leq d(a,x)+d(y,x)\leq d(a,x)+r_x\leq d(a,x)+r-d(a,x)=r$ tengsizlikdan $d(a,y)<r$, munosabat kelib chiqadi. Demak $B_{r_x}(x)\subset B_r(a)$ munosabat o'rinlidir. Endi biz bo'sh to'plamni $\varnothing$ bilan belgilab, uni ixtiyoriy to'plam uchun qism to'plam hisoblaymiz, va uni R^n fazoning *ochiq qism to'plami* deb qabul qilamiz. Ana shunda ochiq qism to'plamlar uchun quyidagi teoremani isbotlay olamiz.

Teorema1. *Ochiq qism to'plamlar uchun quyidagilar o'rinlidir.*

1. *Butun fazo, ya'ni R^n ochiq to'plamdir.*
2. *Bo'sh to'plam ochiq to'plamdir.*
3. *Chekli sondagi ochiq qism to'plamlarning kesishmasi (umumiy qismi) ochiq to'plamdir.*

4. *Har qanday ochiq to'plamlar oilasi uchun bu oiladagi ochiq to'plamlar yig'indisi ochiq to'plamdir.*

Isbot. Teoremaning ikkinchi tasdig'i isbot talab qilmaydi, chunki bo'sh to'plamni ochiq to'plam deb e'lon qilganmiz. Agar $a \in R^n$ bo'lsa, ixtiyoriy $r > 0$ soni uchun $B_r(a) \subset R^n$ munosabat har doim o'rinli, shuning uchun ham R^n fazo ochiq to'plamdir.

Endi $A_1, A_2, ..., A_m$ ochiq to'plamlar berilgan bo'lsa, $A = \bigcap_{i=1}^{m} A_i$ to'plamning ochiq ekanligini ko'rsataylik. Agar $A = \varnothing$ bo'lsa, ikkinchi punktga ko'ra A ochiq to'plam bo'ladi. Shuning uchun $A \neq \varnothing$ deb faraz qilib, A ga tegishli ixtiyoriy a nuqtaning ichki nuqta ekanligini ko'rsataylik. Agar $a \in A$ bo'lsa, unda $a \in A_i$ munosabat barcha i lar uchun bajariladi. Har bir A_i ochiq to'plam bo'lganligi uchun shunday $r_i > 0$ soni mavjudki, $B_{r_i}(a) \subset A_i$ munosabat bajariladi. Bu chekli sondagi r_i sonlarining eng kichigini r bilan belgilasak, $B_r(a) \subset B_{r_i}(a) \subset A_i$ munosabat bajariladi. Demak $B_r(a) \subset A$, va a nuqta A to'plamning ichki nuqtasidir.

Endi teoremaning 4-punktini isbotlaylik. Ochiq to'plamlardan iborat $\{A_\alpha\}$oila berilgan bo'lsin. $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$ yig'indining ochiq to'plam ekanligini ko'rsataylik. Buning uchun A to'plamga tegishli ixtiyoriy a nuqta olib, uning ichki nuqta ekanligini ko'rsatamiz. Yig'indiga tegishli a nuqta yig'indida qatnashayotgan A_α to'plamlarning kamida birortasiga tegishli bo'ladi. Faraz qilaylik $a \in A_{\alpha_0}$ bo'lsin. A_{α_0} to'plam ochiq bo'lganligi uchun birorta $r > 0$ mavjud bo'lib, $B_r(a) \subset A_{\alpha_0}$ munosabat bajariladi. Demak $B_r(a) \subset A$ va A to'plam uchun a ichki nuqta bo'ladi. Bundan esa, A ning ochiq to'plam ekanligi kelib chiqadi.

Endi ochiq to'plam tushunchasidan foydalanib, yopiq to'plam tushunchasini kiritamiz. Berilgan F to'plamning to'ldiruvchisi $CF = R^n \setminus F$ ochiq to'plam bo'lsa, F *yopiq to'plam* deb ataladi. Birinchi teoremadan foydalanib, yopiq to'plamlar uchun quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

Teorema-2. *Yopiq qism to'plamlar uchun quyidagilar o'rinlidir.*

1. Butun fazo, ya'ni R^n yopiq to'plamdir.

2. Bo'sh to'plam yopiq to'plamdir.

3. Har qanday yopiq qism to'plamlar oilasi uchun shu oiladagi to'plamlar kesishmasi yopiq to'plamdir.

4.Chekli sondagi yopiq to'plamlarning yig'indisi yopiq to'plamdir

Biz R^n fazoning $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$ elementlari uchun

$$x + y = (x^1 + y^1, x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n), \ \lambda x = (\lambda x^1, \lambda x^2, \ldots, \lambda x^n)$$

qoidalar bilan yangi $x+y$, λx elementlarni aniqlashimiz mumkin. Bu yerda λ haqiqiy son. Bu kiritilgan amallarga nisbatan R^n chiziqli fazo bo'ladi. Bu holda R^n fazoni chiziqli fazo sifatida qarasak, uning elementini *vektor* deb ataymiz. Chiziqli fazo uchun belgilashni o'zgartirmaymiz, chunki har gal tekst mazmunidan R^n fazoning metrik fazo yoki chiziqli fazo ekanligi ko'rinib turadi. Metrik R^n fazo nuqtalarining har bir x, y juftiga boshi x nuqtada, oxiri esa y nuqtada bo'lgan $\overline{xy}$ vektorni mos qo'ysak, bu vektor chiziqli R^n fazoning elementi bo'ladi. Chiziqli R^n fazoda skalyar ko'paytma kiritilgandan keyin metrik R^n fazoni Evklid fazosi deb ataymiz. Demak, R^n fazoni Evklid fazosi deganimizda, unda d funksiya yordamida metrika kiritilib, unga tegishli nuqtalarning har bir juftiga mos qo'yilgan vektorlar fazosida skalyar ko'paytma kiritilgandir.

Evklid fazosida

$$y^i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x^j + a_i, i = 1, 2, \ldots, n,$$

ko'rinishdagi almashtirishda $\{a_{ij}\}$ matritsaning determinanti noldan farqli bo'lsa, *affin almashtirish* deb ataladi. Bu yerda

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \ \bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \ A = (a_{ij}),$$

belgilashlarni hisobga olib affin almashtirishni $\bar{y} = A\bar{x} + \bar{a}$ ko'rinishda yozishimiz mumkin. Agar A matritsa ortogonal matritsa bo'lsa, F akslantirish *harakat* (ortogonal akslantirish) deb ataladi. Ma'lumki, A ortogonal matritsa bo'lsa, $\bar{x}, \bar{y}$ vektorlar uchun

$$(A\bar{x}, A\bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y})$$

tenglik o'rinlidir, ya'ni harakatda skalyar ko'paytma saqlanadi. Haqiqatan, A ortogonal matritsa bo'lsa

$$A^T A = E$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Bu yerda A^T transponirlangan matritsa, E esa birlik matritsadir. Shuning uchun

$$(A\bar{x}, A\bar{y}) = (\bar{x}, A^T A\bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y})$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak ortogonal akslantirishda skalyar ko'paytma saqlanishini ko'rsatish uchun $(A\bar{x}, A\bar{y}) = (\bar{x}, A^T A\bar{y})$ tenglikni isbotlash yetarlidir. Buning uchun R^n fazoda birorta ortonormal $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_n\}$ bazisni tanlab, $\bar{x}$ va $A\bar{y}$ vektorlarni bazis elementlari orqali ifodalaymiz:

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \cdots + x_n\bar{e}_n \ , \ \bar{z} = A\bar{y} = z_1\bar{e}_1 + z_2\bar{e}_2 + \cdots + z_n\bar{e}_n .$$

Endi $(A\bar{x}, A\bar{y})$ skalyar ko'paytmani

$$(A\bar{x}, A\bar{y}) = x_1 z_1 a_{11} + x_1 z_2 a_{21} + \cdots + x_1 z_n a_{n1} +$$
$$+ x_2 z_1 a_{12} + x_2 z_2 a_{22} + \cdots + x_2 z_n a_{n2} +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots +$$
$$+ x_n z_1 a_{1n} + x_n z_2 a_{2n} + \cdots x_n z_n a_{nn}$$

ko'rinishda yozib,undagi $x_1, x_2, \cdots, x_n$ o'zgaruvchilarni guruppalasak

$$(A\bar{x}, A\bar{y}) = x_1 (z_1 a_{11} + z_2 a_{21} + \cdots + z_n a_{n1}) +$$
$$+ x_2 (z_1 a_{12} + z_2 a_{22} + \cdots + z_n a_{n2}) +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots +$$
$$+ x_n (z_1 a_{1n} + z_2 a_{2n} + \cdots + z_n a_{nn})$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu ifodadan

$$(A\bar{x}, A\bar{y}) = (\bar{x}, A^T \bar{z})$$

tenglik kelib chiaqdi.Demak bizga analitik geometriya kursidan ma'lumki harakat ikki nuqta orasidagi masofani saqlaydi. Agar $\det A > 0$ bo'lsa, ma'lumki F harakat fazoda orientatsiyani ham saqlaydi.Haqiqatan bizga ortogonal A matritsa va birorta $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_n\}$ bazis berilgan bo'lsa, $\det A > 0$ bo'lganligi uchun $\{A\bar{e}_1, A\bar{e}_2, \cdots, A\bar{e}_n\}$ bazis berilgan $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_n\}$ bazis bilan bir xil orientatsiyani aniqlaydi.

§ 2. Topologik fazolar

Birorta X to'plam va uning ba'zi qism to'plamlaridan iborat $\tau = \{G_\alpha\}$ oila berilgan bo'lsin. Bu oila chekli sondagi elementlardan iborat bo'lishi yoki uning elementlari cheksiz ko'p bo'lishi mumkin. Berilgan τ oilaga X to'plamning hamma qism to'plamlari tegishli bo'lishi ham mumkin. Shuning uchun biz indeks o'zgaruvchisi α ning qanday to'plamga tegishli ekanligini ko'rsata olmaymiz.

Biz X to'plamning ba'zi qism to'plamlaridan iborat τ oiladan quyidagi shartlarining bajarilishini talab qilamiz:

1) X to'plam τ ga tegishli bo'lsin (ma'lumki, har qanday to'plam o'zining qism to'plami bo'ladi. Shuning uchun u τ oilaga tegishli bo'lishi ham mumkin, bo'lmasligi ham mumkin);

2) Bo'sh to'plam τ oilaga tegishli bo'lsin (bo'sh to'plam har qanday to'plamga qism to'plamdir, shuning uchun u X to'plamning qism to'plami sifatida τ oilaga tegishli bo'lishi mumkin yoki bo'lmasligi mumkin);

3) τ oilaga tegishli har qanday ikkita to'plamning umumiy qismi (kesishmasi) τ oilaga tegishlidir.

4) τ oilaga tegishli qism to'plamlardan iborat ixtiyoriy $\{G_{\alpha_\beta}\}$ oila uchun yig'indi $\bigcup_\beta G_{\alpha_\beta}$ ham τ ga tegishli bo'lsin.

Bu yerda $\{G_{\alpha_\beta}\}$ oila chekli sondagi elementlardan iborat yoki cheksiz ko'p elementlardan iborat bo'lishi mumkin. Shuning uchun bu yerda ham biz indeksdagi o'zgaruvchi β tegishli to'plamni ko'rsata olmaymiz. Shu jumladan, $\{G_{\alpha_\beta}\}$ oila τ oila bilan ustma-ust tushishi ham mumkin. Yuqoridagi talab qilingan 4 ta shartlar bajarilgan taqdirda (X,τ) juftlik *topologik fazo* deb ataladi, τ oila esa X to'plamdagi *topologiya* deb ataladi. Demak, birorta to'plamni topologik fazoga aylantirish uchun uning yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi qism to'plamlaridan iborat birorta oilani ko'rsatish yetarlidir. Agar (X,τ) topologik fazo bo'lsa, X to'plamning elementlari *nuqtalar* deb, τ oilaga tegishli X to'plamning qism to'plamlari *ochiq to'plamlar* deb ataladi. Yuqoridagi keltirilgan 1) - 4) shartlarni *topologik fazo aksiomalar*i deb ataymiz.Shunday qilib, biz hozir umumiy topologiyaning asosiy tushunchasi - *topologik fazo* tushunchasini kiritdik. Endi bir nechta misollar keltiraylik.

1 - misol. Agar $X = R^n$ bo'lsa, τ bilan birinchi paragrifda kiritilgan R^n fazodagi ochiq to'plamlar oilasini belgilaymiz. Birinchi teoremaga ko'ra, τ topologiya bo'ladi. Bu topologiya *yevklid topologiyasi* deb ataladi.

2 - Misol. X - ixtiyoriy to'plam, τ oila bo'sh to'plam va X dan iborat bo'lsa, (X,τ) juftlik topologik fazo bo'ladi. Bu topologik fazoda faqat ikkita ochiq qism to'plam mavjud.

3 - Misol. X - ixtiyoriy to'plam, τ oila X to'plamning hamma qism to'plamlaridan iborat oila bo'lsin. Bu topologik fazoda ixtiyoriy qism to'plam ochiq to'plamdir.

Bizga (X,τ) - topologik fazoda $A\subset X$ qism to'plam berilgan bo'lib, uning to'ldiruvchisi $X\setminus A$ ochiq to'plam bo'lsa, A to'plam *yopiq to'plam* deb ataladi. Topologik fazo aksiomalaridan foydalanib yopiq to'plamlar uchun quyidagi xulosalarni isbotlash mumkin:

1) X yopiq to'plamdir;

2) bo'sh to'plam yopiq to'plamdir;

3) chekli sondagi yopiq to'plamlarning yig'indisi yopiq to'plamdir;

4) ixtiyoriy yopiq to'plamlar oilasi uchun bu to'plamlar kesishmasi (umumiy qismi) yopiq to'plamdir;

Bu xossalarni isbotlash o'quvchilarga havola qilinadi.

Bizga (X,τ) - topologik fazoda $x\in X$ nuqta berilgan bo'lsin. Agar U ochiq to'plam bo'lib, $x\in U$ bo'lsa, U to'plam x nuqtaning *atrofi* deyiladi. Shunday qilib, x nuqta tegishli bo'lgan ixtiyoriy ochiq to'plam shu nuqtaning atrofi deyilar ekan. Bizga $A\subset X$ qism to'plam va $x\in X$ nuqta berilgan bo'lib, x nuqtaning birorta atrofi U uchun $U\subset A$ munosabat bajarilsa, x nuqta A to'plamning *ichki nuqtasi* deyiladi. A to'plamning ichki nuqtalari to'plamini $\mathrm{int}\,A$ bilan belgilaymiz. Agar x nuqtaning ixtiyoriy atrofi U uchun $A\cap U\neq\varnothing$ va $(X\setminus A)\cap U\neq\varnothing$ munosabatlar bajarilsa x nuqta A to'plamning *chegaraviy nuqta*si deyiladi. Chegaraviy nuqtalar to'plamini ∂A ko'rinishda belgilaymiz.

4 – misol. $X=R^1$, $A=(a,b)$ bo'lsin. Bu yerda a,b - haqiqiy sonlar va $a<b$. Bu misolimizda $\mathrm{int}\,A=(a,b)$, $\partial A=\{a,b\}$.

5 - misol. $X = R^1$, A - hamma ratsional sonlar to'plami bo'lsin. Bu misolimizda $\partial A = X$, chunki ixtiyoriy haqiqiy son uchun unga yaqinlashuvchi ratsional sonlar ketma-ketligi mavjud.

Bizga $A \subset X$ qism to'plam va $x \in X$ nuqta berilgan bo'lsin. Agar x nuqtaning ixtiyoriy atrofida A to'plamga tegishli nuqtalar mavjud bo'lsa, x nuqta A to'plamning *urinish nuqta*si deyiladi. Berilgan A to'plamning hamma urinish nuqtalari to'plami $\overline{A}$ bilan belgilanadi va A ning *yopig'i* deb ataladi.

Berilgan $A \subset X$ to'plam va $\mathrm{int} A$, ∂A va $\overline{A}$ to'plamlar uchun quyidagi teoremalar o'rinlidir.

Teorema-3. *Har qanday A to'plam uchun $\overline{A} = \mathrm{int}\, A \cup \partial A$ munosabat o'rinlidir.*

Teorema-4. *A to'plam ochiq to'plam bo'lishi uchun $\mathrm{int}\, A = A$ munosabatning bajarilishi zarur va yetarlidir.*

Teorema-5. *Har qanday A to'plam uchun $\overline{A}$ yopiq to'plamdir.*

Uchinchi teoremaning isboti. Sizlarga ma'lumki $A = B$ munosabat $A \subset B$, $B \subset A$ munosabatlarga teng kuchlidir. Demak $\overline{A} \subset \mathrm{int}\, A \cup \partial A$ va $\overline{A} \supset \mathrm{int}\, A \cup \partial A$ munosabatlarni isbotlashimiz kerak.

Agar $x \in \overline{A}$ bo'lsa, x nuqtaning ixtiyoriy atrofida A to'plamga tegishli nuqtalar mavjud. Agar x nuqtaning ixtiyoriy atrofida $X \setminus A$ to'plamga tegishli nuqtalar ham bo'lsa, unda $x \in \partial A$ munosabat o'rinli , ya'ni x chegaraviy nuqta bo'ladi. Agar x nuqtaning birorta U atrofida $X \setminus A$ to'plamga tegishli nuqtalar bo'lmasa, unda $x \in U \subset A$ munosabat o'rinli ,ya'ni x ichki nuqta bo'ladi, demak $x \in \mathrm{int}\, A$. Bu mulohazalarimizdan, $\overline{A} \subset \mathrm{int}\, A \cup \partial A$ ekanligi kelib chiqadi. Endi $x \in \mathrm{int}\, A \cup \partial A$ bo'lsin. Demak, $x \in \mathrm{int}\, A$ yoki $x \in \partial A$ munosabat bajariladi. Ikkala holda ham x nuqtaning ixtiyoriy atrofida A to'plamga tegishli nuqtalar mavjud va demak $x \in \overline{A}$.

To'rtinchi teoremaning isboti o'quvchilarimizga havola etiladi.

Beshinchi teoremaning isboti. Biz $\overline{A}$ to'plamning yopiq to'plam ekanligini isbotlash uchun $X \setminus \overline{A}$ to'plamning ochiq to'plam ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun $X \setminus \overline{A}$ ga tegishli ixtiyoriy x nuqtani qaraylik. Demak, x nuqta $\overline{A}$ ga tegishli emas va shuning uchun uning shunday U atrofi mavjudki, bu atrofda A ga tegishli nuqtalar yo'q, ya'ni $U \cap A = \varnothing$. Shuning uchun $x \in U \subset X \setminus \overline{A}$, ya'ni x nuqta $X \setminus \overline{A}$ to'plamning ichki nuqtasidir. To'rtinchi teoremaga ko'ra $X \setminus \overline{A}$ ochiq to'plamdir.

Teorema-6. *Ixtiyoriy yopiq A to'plam uchun $\overline{A} = A$ munosabat o'rinlidir.*

Isbot. Har doim $A \subset \overline{A}$ bo'lganligi uchun yopiq A to'plam uchun $A \supset \overline{A}$ munosabatni isbotlash yetarli. Buning uchun $\overline{A}$ ga tegishli ixtiyoriy x nuqtani qaraylik. Agar $x \in X \setminus A$ bo'lsa, $X \setminus A$ ochiq bo'lganligi va x urinish nuqtasi ekanligidan $(X \setminus A) \cap A \neq \varnothing$ munosabat kelib chiqadi. Bu qarama-qarshilik $x \in A$ ekanligini ko'rsatadi.

Endi (X, τ) topologik fazo va birorta $A \subset X$ qism to'plam berilgan bo'lsin. Berilgan A to'plamni ham τ topologiya yordamida topologik fazoga aylantirish mumkin. Buning uchun A to'plamda $\tau_A = \{A \cap G_\alpha : G_\alpha \in \tau\}$ oila topologiya ekanligini ko'rsatamiz:

1) $X \in \tau$ bo'lganligi va $X \cap A = A$ tenglikdan $A \in \tau_A$ kelib chiqadi.

2) $\varnothing \in \tau$ bo'lganligi va $\varnothing \cap A = \varnothing$ tenglikdan $\varnothing \in \tau_A$ kelib chiqadi.

3) $A_1, A_2 \in \tau_A$ bo'lsa, $G_1, G_2 \in \tau_A$ to'plamlar mavjud bo'lib,

$A_1 \cap A_2 = (A \cap G_1) \cap (A \cap G_2) = A \cap (G_1 \cap G_2)$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $G_1 \cap G_2 \in \tau$ bo'lganligi uchun $A_1 \cap A_2 \in \tau_A$ bo'ladi.

4) τ_A oilaga tegishli $\{A_\beta\}$ to'plamlar oilasi berilgan bo'lsa, τ ga tegishli G_β to'plamlar mavjud bo'lib,

O'zMU AXBOROT-RESURS MARKAZI 2024/145 12

$\bigcup_\beta A_\beta = \bigcup_\beta (A \cap G_\beta) = A \cap \left(\bigcup_\beta G_\beta\right)$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $\bigcup_\beta G_\beta \in \tau$ bo'lganligi uchun $\bigcup_\beta A_\beta$ yig'indi τ_A oilaga tegishli bo'ladi.

Demak (A, τ_A) juftlik topologik fazo bo'ladi. Bu holda τ_A topologiyani A to'plamda X topologik fazodagi τ topologiya yordamida aniqlangan yoki *keltirilgan topologiya* deb ataladi.

§ 3. Metrik fazolar

Metrik fazolar topologik fazolarning juda muhim sinfini tashkil etadi. Bu fazolarda ixtiyoriy ikki nuqta uchun ular orasidagi masofa tushunchasi kiritiladi. Metrik fazolarning muhim turlari bilan siz birinchi kursda tanishgansiz.

Berilgan X- ixtiyoriy to'plam uchun to'g'ri $X \times X$ ko'paytmada $\rho : X \times X \to R^1$ funksiya aniqlangan bo'lib, quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $\rho(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in X$
2) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad \forall x, y \in X$
3) $\rho(x, y) = \rho(y, x), \quad \forall x, y \in X$
4) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \quad \forall x, y, z \in X$

Yuqoridagi shartlar metrik fazo aksiomalari deyiladi. Bu shartlar bajarilsa (X, ρ) juftlik *metrik fazo* deyiladi. (X, ρ) - metrik fazo, $x \in X$, $r > 0$ bo'lsa markazi x nuqtada va radiusi r ga teng ochiq shar $U_r(x)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$U_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$$

Ochiq shar yordamida metrik fazoda ochiq to'plam tushunchasini kiritish mumkin. Bizga $A \subset X$ - qism to'plam, $x \in A$ nuqta berilgan bo'lib, birorta $r > 0$ son uchun $U_r(x) \subset A$ munosabat bajarilsa x nuqta A to'plamning *ichki nuqtasi* deyiladi. Hamma nuqtalari ichki nuqtalar bo'lgan to'plam *ochiq to'plam* deyiladi. Agar τ oila sifatida (X, ρ) metrik fazoning hamma ochiq qism to'plamlari va bo'sh to'plamdan iborat oilani olsak, natijada (X, τ)

juftlik topologik fazoga aylanadi. Bu topologiya (X,ρ) fazoda ρ metrika yordamida kiritilgan *topologiya* deb ataladi. Endi τ oilaning topologik fazo aksiomalarini qanoatlantirishini tekshiraylik.

1) $x \in X$ va r ixtiyoriy son bo'lsa, $U_r(x) \subset X$ bo'lganligi uchun X to'plam τ oilasiga tegishlidir;

2) Bo'sh to'plam τ oilaga uning aniqlanishiga ko'ra tegishlidir;

3) Ikkita to'plam τ oilaga tegishli bo'lsa,ularning kesishmasi ham bu oilaga tegishli ekanligini ko'rsataylik. Agar $A_1, A_2 \in \tau$ va $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ bo'lsa, ikkinchi shartga ko'ra $A_1 \cap A_2 \in \tau$ munosabat o'rinlidir. Faraz qilaylik, $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$ va $x \in A = A_1 \cap A_2$ bo'lsin. Qaralayotgan A_1 va A_2 to'plamlar ochiq bo'lganligi uchun shunday r_1 va r_2 musbat sonlar mavjudki, $U_{r_1}(x) \subset A_1$, $U_{r_2}(x) \subset A_2$ munosabatlar bajariladi. Agar $0 < r < \min\{r_1, r_2\}$ bo'lsa, $U_r(x) \subset A = A_1 \cap A_2$ munosabat bajariladi. Demak, $A = A_1 \cap A_2$ to'plam τ oilaga tegishlidir;

4) Faraz qilaylik $\{A_\alpha\}$ - τ oilaga tegishli to'plamlar oilasi bo'lsin.

Biz $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \tau$ ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun $x \in A = \cup A_\alpha$ nuqtani qaraylik. Qaralayotgan x nuqta yig'indiga tegishli bo'lganligi uchun shunday indeks α_0 mavjudki, $x \in A_{\alpha_0}$ munosabat bajariladi. Bu A_{α_0} to'plam ochiq bo'lganligi uchun shunday $r > 0$ son mavjudki, $U_r(x) \subset A_{\alpha_0} \subset A$ munosabat bajariladi.Demak, $A \in \tau$ va τ oila topologik fazo aksiomalarini qanoatlantiradi.

Misollar

6 - Misol. $X = R^1$, $\rho(x,y) = |x-y|$

7-Misol. $X = R^n$, $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i - y^i)^2}$, $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$, $y = (y^1, y^2, ..., y^n)$.

8-Misol. $X = C[a,b]$ bilan $[a,b]$ segmentda aniqlangan uzluksiz funksiyalar to'plamini belgilaymiz. Bu to'plamda $x(t)$, $y(t)$ funksiyalar uchun $r(x,y) = \sup\limits_{t\in[a,b]} |y(t) - x(t)|$ formula bo'yicha metrikani aniqlaymiz. Bu holda r uchun metrik fazo aksiomalarini tekshirish yengil, shuning uchun bu ishni o'quvchilarga havola etamiz.

Endi metrik fazo uchun ichki, chegaraviy va urinish nuqtalarini kiritaylik.

Faraz qilaylik $A \subset X$ - qism to'plam, $x \in X$ nuqta berilgan bo'lib, ixtiyoriy $r > 0$ uchun $U_r(x) \cap A \neq \varnothing$, $U_r(x) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$ munosabatlar bajarilsa, x nuqta A to'plamning *chegaraviy nuqta*si deyiladi. Agar ixtiyoriy $r > 0$ uchun faqat $U_r(x) \cap A \neq \varnothing$ munosabat bajarilsa, x nuqta A to'plamning *urinish nuqta*si deyiladi. Birorta $r > 0$ soni uchun $U_r(x) \subset A$ munosabat bajarilsa, x nuqta A to'plam uchun *ichki nuqta* deyiladi.

Teorema-7. *Haqiqiy sonlar to'plamining har qanday ochiq qism to'plami chekli yoki sanoqli sondagi ochiq intervallar yig'indisidan iboratdir.*

Isbot. Faraz qilaylik $A \subset R^1$ ochiq to'plam bo'lsin. Ochiq to'plam ta'rifiga ko'ra $x \in A$ nuqta uchun $r > 0$ soni mavjud bo'lib, $(x - r, x + r) \subset A$ munosabat bajariladi. Biz $x \in I \subset A$ munosabatni qanoatlantiruvchi intervallar yig'indisini I_x bilan belgilab, $a = \inf\{y : y \in I_x\}$, $b = \sup\{y : y \in I_x\}$ sonlarni kiritamiz. Bu yerda $a = -\infty$ yoki $b = +\infty$ bo'lishi ham mumkin. Yuqoridagi a va b sonlari aniqlanishiga ko'ra $I_x \subset (a,b)$ munosabat o'rinli bo'ladi. Agar $y \in (a,b)$ va $y \neq x$ bo'lsa, umumiylikni chegaralamasdan $a < x < y$ deb faraz qilamiz. $a = \inf\{y : y \in I_x\}$ bo'lgani uchun $y' \in I_x$ mavjud bo'lib, $a < y' \leq y$ munosabat bajariladi. Kiritilgan I_x intervalning aniqlanishiga ko'ra y' va x nuqtalarni o'z ichiga oluvchi interval mavjud bo'ladi va bu interval y nuqtani ham o'z ichiga oladi. Demak, $y \in I_x$ ya'ni $I_x = (a,b) \subset A$. Agar $x, y \in A, x \neq y$ bo'lsa, I_x va I_y

to'plamlar yoki kesishmaydi yoki ustma-ust tushadi. Bu I_x, $x \in A$, intervallarning har biridan bittadan ratsional son olib, ularni nomerlab chiqish mumkin. Demak, bu intervallar oilasi va ratsional sonlar to'plamining birorta qism to'plami orasida bir qiymatli moslik mavjud. Shuning uchun ularning soni chekli yoki sanoqli bo'ladi.

Yopiq to'plam ochiq to'plamning to'ldiruvchisi bo'lgani uchun, bu teoremadan har qanday yopiq to'plam chekli yoki sanoqli sondagi ochiq intervallarni chiqarib tashlash $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ natijasida hosil bo'lishi kelib chiqadi.

Metrik fazoda $x_n \in X$ ketma-ketlik berilgan bo'lib, birorta $x_0 \in X$ nuqta uchun $n \to \infty$ bo'lganda $\rho(x_n, x_0) \to 0$ bo'lsa, x_n ketma-ketlik x_0 limitga ega deyiladi, ya'ni x_n ketma-ketlik x_0 limitga ega bo'lishi uchun. $\forall$ $\varepsilon > 0$ uchun N nomer mavjud bo'lib, $n \geq N$ bo'lganda $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilishi kerak.

Agar $\forall$ $\varepsilon > 0$ uchun N mavjud bo'lib, $n, m \geq N$ bo'lganda $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ munosabat bajarilsa, x_n ketma-ketlik fundamental ketma-ketlik deb ataladi. Tekshirib ko'rish mumkinki, har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamental bo'ladi. Lekin, fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishi shart emas.

Ta'rif. *Berilgan (X, ρ) metrik fazoda ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, bu fazo to'liq metrik fazo deyiladi.*

Misollar.

1. Haqiqiy sonlar to'plami R^1 yevklid metrikasi bilan birgalikda to'liq metrik fazo ekanligi matematik analiz kursidan isbotlanadi.

2. Biz yuqorida ko'rib o'tgan R^n evklid fazosining to'liqligi R^1ning to'liq fazo ekanligidan bevosita kelib chiqadi.Bizga R^n fazoda $\{x^{(p)}\}$ fundamental ketma-ketlik berilgan bo'lsin.Demak berilgan $\varepsilon > 0$ son uchun $N = N_\varepsilon$ soni mavjud bo'lib, p, q sonlari N dan katta bo'lganda

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^{(p)}-x_k^{(q)}\right)^2<\varepsilon^2$$

tengsizlik bajariladi. Bu yerda $x^{(p)}=\left(x_1^{(p)},...,x_n^{(p)}\right)$. Har bir $k=1,...,n$ uchun $x_k^{(p)}$ kootdinatalar $p,q>N$ bo'lganda $\left|x_k^{(p)}-x_k^{(q)}\right|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi, ya'ni $\{x_k^{(p)}\}$ketma-ketlik fundamental ketma-ketlik bo'ladi. Demak $\{x_k^{(p)}\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlikdir. Agar $x_k=\lim\limits_{n\to\infty}x_k^{(n)}$ va $x=(x_1,...,x_n)$ bo'lsa, $\lim\limits_{p\to\infty}x^p=x$ munosabat o'rinli bo'ladi.

3. Endi $[a,b]$ segmentda aniqlangan uzluksiz funksiyalar to'plami $X=C[a,b]$ to'liq metrik fazo ekanligini isbotlaylik. Bu to'plamda $x(t)$, $y(t)$ funksiyalar uchun $r(x,y)=\sup\limits_{t\in[a,b]}|y(t)-x(t)|$ formula bo'yicha metrika aniqlanadi. Agar $C_{[a,b]}$ fazoda $\{x_n(t)\}$ fundamental ketma-ketlik berilgan bo'lsa,har qanday $\varepsilon>0$ soni uchun $N=N_\varepsilon$ soni mavjud bo'lib, $n,m>N$ bo'lganda $|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon$ tengsizlik $a\le t\le b$ oraliqdagi hamma $t$lar uchun bajariladi. Bundan $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlik birorta $x(t)$ funksiyaga tekis yaqinlashishi kelib chiqadi.Yuqoridagi tengsizlikda $m\to\infty$da limitga o'tsak $n>N$ bo'lganda $|x_n(t)-x(t)|\le\varepsilon$ munosabat hamma t lar uchun bajarilishini ko'ramiz. Demak $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlik uzluksiz $x(t)$ funksiyaga $C_{[a,b]}$ fazo metrikasida yaqinlashadi.

4. Biz l_2 bilan $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty$ shartni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonlar

$$x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$$

ketma-ketliklaridan iborat to'plamni belgilaymiz. Bu fazoda

$x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ va $y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots\}$

elementlar orasidagi masofa

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k-x_k)^2}$$

formula bilan aniqlanadi.Berilgan $x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ va $y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots\}$ elementlar uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty \text{ va } \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty$$

tengsizliklar o'rinli bo'ganligi uchun $(x_k - y_k)^2 \le 2(x_k^2 + y_k^2)$ munosabatdan $\sum_{k=1}^{\infty}(y_k - x_k)^2$ qatorning yaqinlashuvchanligi kelib chiqadi. Biz isbotlagan

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k - y_k)^2}$$

tengsizlikda $n \to \infty$ da limitga o'tsak quyidagi

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - y_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - z_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(z_k - y_k)^2}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bu tengsizlik l_2 fazodagi kiritilgan masofa uchburchak tengsizligini qanoatlantirishi kelib chiqadi.

Endi biz l_2 fazoning to'liq metrik fazo ekanligini isbotlaylik. Agar $\{x^{(n)}\}$ fundamental ketma-ketlik bo'lsa $\forall\ \varepsilon > 0$ uchun shunday N soni topilib, ushbu $\rho^2(x^{(n)},x^{(m)}) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right)^2 < \varepsilon$ tengsizlik barcha $n,m > N$ lar uchun bajariladi. Bu yerda $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots)$ bo'lib, ixtiyoriy k uchun $(x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bundan har bir k uchun $\{x_k^{(n)}\}$ haqiqiy sonlar ketma-ketligi fundamental ekanligi kelib chiqadi. Demak $\{x_k^{(n)}\}$ yaqinlashuvchi, ketma-ketlidir.Agar $x_k = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}$ bo'lsa, $x = (x_{1,}\ x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ belgilash kiritib,

$$a)\quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \varepsilon, \quad x \in l_2\ ;\ b)\quad \lim_{n\to\infty} \rho(x^{(n)}, x) = 0$$

munosabatlarni ko'rsatamiz.

Yuqoridagi $\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right)^2 < \varepsilon$ tengsizlikdan chekli M soni uchun $\sum_{k=1}^{M}(x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon$ tengsizlik kelib chiqadi.Bu tengsizlikda

$m\to\infty$ limitga o'tsak $\sum_{k=1}^{M}\left(x_k^{(n)}-x_k\right)^2\le\varepsilon$ tengsizlik kelib chiqadi. Endi $M\to\infty$ da limitga o'tsak $\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)}-x_k\right)^2\le\varepsilon$ munosabat kelib chiqadi. Demak $\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)}-x_k\right)^2$ qator yaqinlashadi. Berilgan $\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)}\right)^2$ qatorning yaqinlashishini hisobga olsak, $\sum_{k=1}^{\infty}x_k^{\ 2}$ qatorning yaqinlashishi kelib chiqadi. Yuqoridagi keltirilgan $\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)}-x_k\right)^2\le\varepsilon$ tengsizlikda ε soni ixtiyoriy kichik bo'ganligidan $\lim\limits_{n\to\infty}\rho\left(x^{(n)},x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)}-x_k\right)^2}=0$ munosabat kelib chiqadi. Demak l_2 fazoda $n\to\infty$ da $x^{(n)}\to x$ bo'ladi.

4.Endi $[-1,+1]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz funksiyalar to'plamida boshqa

$$\rho(x,y)=\left(\int_{-1}^{1}(x(t)-y(t))^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

ko'rinishda metrika kiritib, uni $C^2[-1,+1]$ bilan belgilaymiz.Bu fazoning to'liq metrik fazo emasligini isbotlaylik. Buning uchun

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}-1, & agar\ -1\le t\le-\dfrac{1}{n}\\ nt, & agar\ -\dfrac{1}{n}\le t\le\dfrac{1}{n}\\ 1, & agar\ \dfrac{1}{n}\le t\le 1\end{cases}$$

ko'rinishda uzluksiz funksiyalar ketma-ketligini olamiz. Bu funksiyalar uchun

$$\int_{-1}^{1}(\varphi_n(t)-\varphi_m(t))^2\,dt\le\frac{2}{\min(n,m)}$$

tengsizlik o'rinli bo'lib,uning fundamental ketma-ketlik ekanligini ko'rsatadi. Bu funksiyalar $C^2_{[-1,1]}$ fazodagi birorta funksiyaga ham yaqinlashmaydi. Buni ko'rsatish uchun, $C^2_{[-1,1]}$